# Lösungsvorschläge zur 7. Übung Analysis II

**Aufgabe 25** a) Seien $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ und $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Es gilt

$$f'(x,y,z) = J_f(x,y,z) = \operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)\right)$$

$$= (y+4x, x, 0).$$

Schreibe $g = (g_1, g_2, g_3)$, mit $g_1(u,v,w) = 1+3w$, $g_2(u,v,w) = u^2+w^2+v$, $g_3(u,v,w) = 4vw$.

$$g'(u,v,w) = J_g(u,v,w) = \begin{pmatrix} -\operatorname{grad} g_1(u,v,w) - \\ -\operatorname{grad} g_2(u,v,w) - \\ -\operatorname{grad} g_3(u,v,w) - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_1(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial v} g_1(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial w} g_1(u,v,w) \\ \frac{\partial}{\partial u} g_2(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial v} g_2(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial w} g_2(u,v,w) \\ \frac{\partial}{\partial u} g_3(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial v} g_3(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial w} g_3(u,v,w) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2u & 1 & 2w \\ 0 & 4w & 4v \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $(f \circ g)'$ und $(g \circ g)'$ mit der Kettenregel,

$$(f \circ g)'(u,v,w) = J_f(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)) \cdot J_g(u,v,w)$$

$$= (g_2(u,v,w) + 4g_1(u,v,w), g_1(u,v,w), 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2u & 1 & 2w \\ 0 & 4w & 4v \end{pmatrix}$$

$$= (u^2+w^2+v+12w+4, 1+3w, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2u & 1 & 2w \\ 0 & 4w & 4v \end{pmatrix}$$

$$= (2u+6uw, 1+3w, 3u^2+9w^2+3v+38w+12).$$

$$(g \circ g)'(u,v,w) = J_g(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)) \cdot J_g(u,v,w)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2g_1(u,v,w) & 1 & 2g_3(u,v,w) \\ 0 & 4g_3(u,v,w) & 4g_2(u,v,w) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2u & 1 & 2w \\ 0 & 4w & 4v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2+6w & 1 & 8vw \\ 0 & 16vw & 4u^2+4w^3+4v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2u & 1 & 2w \\ 0 & 4w & 4v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 12w & 12v \\ 2u & 1+32vw^2 & 6+20w+32v^2w \\ 32uvw & 16u^2w+16w^3+32vw & 16u^2v+16v^2+48vw^2 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt $h=(h_1,\dots,h_n)$, mit $h_i(x) = \frac{x_i}{(1-(x_1^2+\dots+x_n^2))^{\frac{1}{2}}}$, $i \in \{1,\dots,n\}$.

Für $j\in\{1,\dots,n\}$ und $x \in B_1$ gilt, nach der Kettenregel,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{(1-(x_1^2+\dots+x_n^2))^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1-(x_1^2+\dots+x_n^2))^{\frac{3}{2}}} (-2x_j) = \frac{x_j}{(1-|x|_2^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial x_j} h_i(x) = \frac{\delta_{ij}}{(1-|x|_2^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_i x_j}{(1-|x|_2^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{wobei } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases} \quad \text{(Kronecker-Symbol)}$$

Wir erhalten

$$J_h(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} h_i(x)\right)_{i,j=1,\dots,n} = \left( \frac{\delta_{ij}}{(1-|x|_2^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_i x_j}{(1-|x|_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

c) Es gilt

$$J_\Pi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix},$$

für alle $(r,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 26 Wir definieren $f=(f_1,f_2,f_3):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ durch

$f_1(x,y,z) = e^x+\cos y+z^3-2$, $f_2(x,y,z) = xyz+\sin z$, $f_3(x,y,z) = 3y-2+2e^{xz}$.

Dann ist das nichtlineare GLS äquivalent zu

$$f(x,y,z) = (\delta_1, \delta_2, \delta_3).$$

$f$ ist stetig diffbar auf ganz $\mathbb{R}^3$. Es gilt $f(0,0,0) = (0,0,0)$.
Wir wollen den <u>Satz über lokale Invertierbarkeit</u> benutzen, um zu zeigen, dass es offene Umgebungen $U_0 \subset \mathbb{R}^3$ von $(0,0,0)$ und $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ von $f(0,0,0) = (0,0,0)$ gibt so, dass $f: U_0 \to V_0$ <u>bijektiv</u> ist. In diesem Fall ist das GLS dann für alle $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \in V_0$ lösbar, mit

$$(x,y,z) = f^{-1}(\delta_1, \delta_2, \delta_3).$$

Zu zeigen ist, dass $J_f(0,0,0) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ <u>invertierbar</u> ist. Für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x & -\sin y & 3z^2 \\ yz & xz & xy + \cos z \\ 2ze^{xz} & 3 & 2xe^{xz} \end{pmatrix},$$

also

$$J_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten dieser Matrix sind linear unabhängig, also ist $J_f(0,0,0)$ invertierbar.

Die gefundenen Lösungen sind <u>eindeutig in der Menge $U_0$</u>. Jedoch kann es für gegebenes $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \in V$ noch weitere Lösungen $(x,y,z) \notin U$ geben, da der Satz über lokale Invertierbarkeit nur <u>lokale Aussagen</u> macht.

<u>Aufgabe 27</u> Wir benutzen zweimal die Kettenregel: Für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$J_{h\circ(g\circ f)}(x) = J_h(g(f(x))) \cdot J_{g\circ f}(x)$$

$$= J_h(g(f(x))) \cdot J_g(f(x)) \cdot J_f(x).$$

Mit $h = (h_1, h_2, h_3)$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ und $f = (f_1, f_2)$ gilt

$$\mathcal{J}_h(g(f(x))) = \begin{pmatrix} D_1 h_1(g(f(x))) & D_2 h_1(g(f(x))) & D_3 h_1(g(f(x))) \\ D_1 h_2(g(f(x))) & D_2 h_2(g(f(x))) & D_3 h_2(g(f(x))) \\ D_1 h_3(g(f(x))) & D_2 h_3(g(f(x))) & D_3 h_3(g(f(x))) \end{pmatrix} \quad (3\times 3\text{-Matrix}),$$

$$\mathcal{J}_g(f(x)) = \begin{pmatrix} D_1 g_1(f(x)) & D_2 g_1(f(x)) \\ D_1 g_2(f(x)) & D_2 g_2(f(x)) \\ D_1 g_3(f(x)) & D_2 g_2(f(x)) \end{pmatrix} \quad (3\times 2\text{-Matrix}),$$

$$\mathcal{J}_f(x) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & D_2 f_1(x) \\ D_1 f_2(x) & D_2 f_2(x) \end{pmatrix} \quad (2\times 2\text{-Matrix}).$$

Der Übersicht halber setzen wir nun $z = g(f(x)) \in \mathbb{R}^3$, $y = f(x) \in \mathbb{R}^2$. Dann

$$\mathcal{J}_h(z)\cdot \mathcal{J}_g(y) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 D_j h_1(z) D_1 g_j(y) & \sum_{j=1}^3 D_j h_1(z) D_2 g_j(y) \\ \sum_{j=1}^3 D_j h_2(z) D_1 g_j(y) & \sum_{j=1}^3 D_j h_2(z) D_2 g_j(y) \\ \sum_{j=1}^3 D_j h_3(z) D_1 g_j(y) & \sum_{j=1}^3 D_j h_3(z) D_2 g_j(y) \end{pmatrix} \quad (3\times 2\text{-Matrix}),$$

$$\mathcal{J}_h(z)\cdot \mathcal{J}_g(y)\cdot \mathcal{J}_f(x) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^2\sum_{j=1}^3 D_j h_1(z) D_k g_j(y) D_1 f_k(x) & \sum_{k=1}^2\sum_{j=1}^3 D_j h_1(z) D_k g_j(y) D_2 f_k(x) \\ \sum_{k=1}^2\sum_{j=1}^3 D_j h_2(z) D_k g_j(y) D_1 f_k(x) & \sum_{k=1}^2\sum_{j=1}^3 D_j h_2(z) D_k g_j(y) D_2 f_k(x) \\ \sum_{k=1}^2\sum_{j=1}^3 D_j h_3(z) D_k g_j(y) D_1 f_k(x) & \sum_{k=1}^2\sum_{j=1}^3 D_j h_3(z) D_k g_j(y) D_2 f_k(x) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^2\sum_{j=1}^3 D_j h_\ell(g(f(x))) D_k g_j(f(x)) D_m f_k(x)\right)_{\substack{\ell=1,2,3\\ m=1,2}} \quad (3\times 2\text{-Matrix}).$$

<u>Aufgabe 28</u> Wir gehen ähnlich wie in Aufgabe 22 vor. Wir möchten zeigen, dass $F$ in $(A,x) \in \mathbb{R}^{n^2+n}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ und $x \in \mathbb{R}^n$, total differenzierbar ist. Seien dazu $H \in \mathbb{R}^{n^2}$ und $h \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$F(A+H, x+h) = (A+H)(x+h) = Ax + Hx + Ah + Hh$$

$$= F(A,x) + Hx + Ah + Hh.$$

Wir definieren nun

$$F': \mathbb{R}^{n^2+n} = \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n^2+n}, \mathbb{R}^n), \quad F'(A,x)(H,h) = Hx + Ah.$$

- Es gilt wirklich $F'(A,x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n^2+n}, \mathbb{R}^n)$ für alle $(A,x) \in \mathbb{R}^{n^2+n}$:

Seien dazu $(H,h), (\tilde{H},\tilde{h}) \in \mathbb{R}^{n^2+n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$F'(A,x)(\lambda(H,h) + (\tilde{H},\tilde{h})) = F'(A,x)(\lambda H + \tilde{H}, \lambda h + \tilde{h})$$

$$= (\lambda H + \tilde{H})x + A(\lambda h + \tilde{h}) = \lambda(Hx + Ah) + (\tilde{H}x + A\tilde{h})$$

$$= \lambda F'(A,x)(H,h) + F'(A,x)(\tilde{H},\tilde{h}),$$

d.h. $F'(A,x)$ ist linear von $\mathbb{R}^{n^2+n}$ nach $\mathbb{R}^n$.

- Es gilt $H \cdot h = o(|(H,h)|_2)$ für $(H,h) \to 0$

Die $i$-te Komponente von $H \cdot h$, $i \in \{1, \dots, n\}$, ist gegeben durch

$$(Hh)_i = \sum_{j=1}^{n} H_{ij} h_j.$$

Wir benutzen die Ungleichung $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ (folgt aus $(a-b)^2 \geq 0$),

und schätzen ab:

$$|(Hh)_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |H_{ij}|\,|h_j| \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left( (H_{ij})^2 + h_j^2 \right) \leq \frac{n}{2} |(H,h)|_2^2.$$

Es folgt

$$|Hh|_2 \leq |Hh|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Hh)_i| \leq \frac{n^2}{2} |(H,h)|_2^2.$$

Damit

$$\frac{1}{|(H,h)|_2} |Hh|_2 \leq \frac{n^2}{2} |(H,h)|_2 \xrightarrow[(H,h) \to 0]{} 0.$$

Damit ist $F$ total diff'bar in allen $(A,x) \in \mathbb{R}^{n^2+n}$, mit Ableitungsfunktion $F'$ wie oben angegeben.