7. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Lutz Weis, Martin Meyries

Abgabe bis Freitag, 3. Juni 2011, 12 Uhr

Aufgabe 25 (K):

a) Die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$f(x, y, z) = xy + 2x^2, \qquad g(u, v, w) = (1 + 3w, u^2 + w^2 + v, 4vw).$$

Bestimme f', g', $(f \circ g)'$ und $(g \circ g)'$.

b) Bestimme in jedem Punkt $x \in B_1 \subset \mathbb{R}^n$ die Jacobi-Matrix von

$$h : B_1 \to \mathbb{R}^n, \qquad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|_2^2}}\, x\,.$$

c) Bestimme in jedem Punkt $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3$ die Jacobi-Matrix von

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \Pi(r, \varphi, \theta) = r(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta).$$

Aufgabe 26 (K): Zeige, dass es eine offene Nullumgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ gibt, so dass für alle $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \in V$ das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^x + \cos y + z^3 - 2 &= \delta_1 \\ xyz + \sin z &= \delta_2 \\ 3y - 2 + 2e^{xz} &= \delta_3 \end{aligned}$$

eine Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ besitzt. Was kann man über ihre Eindeutigkeit aussagen?

Aufgabe 27: Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien stetig partiell differenzierbar. Drücke die Jacobi-Matrix von $h \circ g \circ f$ durch die partiellen Ableitungen von f, g und h aus.

Aufgabe 28: Zeige die Differenzierbarkeit und bestimme die Ableitungsfunktion von

$$F : \mathbb{R}^{n^2+n} = \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad F(A, x) = Ax \quad \text{(Multiplikation Matrix mit Vektor).}$$