Lösungsvorschläge zur 8. Übung Analysis II

Aufgabe 29 Betrachte zunächst die Hilfsfunktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = \big(h(xy),\ x\,g(x,y),\ y \big).$$

Dann gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dass

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(h(xy)) & \frac{\partial}{\partial y}(h(xy)) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x g(x,y)) & \frac{\partial}{\partial y}(x g(x,y)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y h'(xy) & x h'(xy) \\ g(x,y) + x\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) & x \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3\times 2\text{-Matrix})$$

Mit $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ gilt für die Jacobi-Matrix von $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$:

$$J_{\mathcal{F}}(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}_1(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{F}_1(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial w} \mathcal{F}_1(u,v,w) \\ \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}_2(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{F}_2(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial w} \mathcal{F}_2(u,v,w) \end{pmatrix} \qquad (2\times 3\text{-Matrix})$$

wegen $F = \mathcal{F} \circ f$ folgt aus der Kettenregel:

$$J_F(x,y) = J_{\mathcal{F}}(f(x,y)) \cdot J_f(x,y) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}_1(f(x,y)) & \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{F}_1(f(x,y)) & \frac{\partial}{\partial w} \mathcal{F}_1(f(x,y)) \\ \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}_2(f(x,y)) & \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{F}_2(f(x,y)) & \frac{\partial}{\partial w} \mathcal{F}_2(f(x,y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y h'(xy) & x h'(xy) \\ g(x,y) + x\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) & x \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}_1(f(x,y))\, y h'(xy) + \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{F}_1(f(x,y)) \big(g(x,y) + x \frac{\partial}{\partial x} g(x,y)\big) & \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}_1(f(x,y))\, x h'(xy) + \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{F}_1(f(x,y))\, x \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) + \frac{\partial}{\partial w} \mathcal{F}_1(f(x,y)) \\ \hline \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}_2(f(x,y))\, y h'(xy) + \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{F}_2(f(x,y)) \big(g(x,y) + x \frac{\partial}{\partial x} g(x,y)\big) & \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}_2(f(x,y))\, x h'(xy) + \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{F}_2(f(x,y))\, x \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) + \frac{\partial}{\partial w} \mathcal{F}_2(f(x,y)) \end{array}\right).$$

Aufgabe 30

a) Da $\mathcal{U}$ beschränkt, ist $\overline{\mathcal{U}}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.
Da $f: \overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^n$ und $|\cdot|_2: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, ist $|f|_2: \overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$ stetig, nimmt also auf dem kompakten $\overline{\mathcal{U}}$ ihr Maximum an. D.h., es gibt ein $x_0 \in \overline{\mathcal{U}}$ mit

$$|f(x_0)|_2 \geq |f(x)|_2 \quad \text{für alle } x \in \overline{\mathcal{U}}.$$

Angenommen $x_0 \in U$. Dann wäre x_0 erst recht ein lokales Maximum in U. Da aber $J_f(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist, kann ein solches nach dem Maximumprinzip nicht existieren. Also $x_0 \notin U$. Da $\overline{U} = U \cup \partial U$, folgt $x_0 \in \partial U$.

b) Als Komposition von auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig partiell diffbaren Fkten ist g stetig auf $\overline{B}(0,r)$ und stetig diffbar auf $B(0,r)$. Wegen

$$J_g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos x_2 & -e^{x_1}\sin x_2 \\ e^{x_1}\sin x_2 & e^{x_1}\cos x_2 \end{pmatrix} \quad \text{gilt}$$

$$\det J_g(x_1,x_2) = e^{2x_1}(\cos x_2)^2 + e^{2x_1}(\sin x_2)^2 = e^{2x_1} \neq 0, \text{ d.h. } J_g(x_1,x_2)$$

ist für alle $(x_1,x_2) \in B(0,r)$ invertierbar.

Die Voraussetzungen von a) sind damit erfüllt, und g nimmt sein Maximum auf $\partial B(0,r)$ an.

Aufgabe 31 Die Lösungen des GLS sind genau die Nullstellen der stetig db. Fkt.

$$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + 3y_1^2 + 4y_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $f((\tfrac{1}{2},0),(\tfrac{1}{2},0)) = (0,0)$ (einsetzen!), sowie

$$D_y f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} f_1(x,y) & \frac{\partial}{\partial y_2} f_1(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y_1} f_2(x,y) & \frac{\partial}{\partial y_2} f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_1 & -1 \\ 6y_1 & 8y_2 \end{pmatrix},$$

woraus $D_y f((\tfrac{1}{2},0),(\tfrac{1}{2},0)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ folgt. Diese Matrix ist invertierbar, mit Inverser $\left(D_y f((\tfrac{1}{2},0),(\tfrac{1}{2},0))\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Laut dem Satz über implizite Funktionen gibt es offene $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(\tfrac{1}{2},0) \in U$, $(\tfrac{1}{2},0) \in V$, sowie ein stetig diffbares $g: U \to \mathbb{R}^2$ mit $g(U) \subseteq V$ und $g(\tfrac{1}{2},0) = (\tfrac{1}{2},0)$, dessen Graph genau die Lösungsmenge von $f(x,y) = 0$ in $U \times V$ beschreibt:

$$f(x,y) = 0 \text{ für } (x,y) \in U \times V \Leftrightarrow y = g(x).$$

Damit ist $(x, g(x))$ eindeutige Lösung des GLS in $U \times V$.
Laut Vorlesung ist die Ableitung von g bei $(\frac{1}{2},0)$ gegeben durch

$$g'(\tfrac{1}{2},0) = -\left(D_y f((\tfrac{1}{2},0),(\tfrac{1}{2},0))\right)^{-1} \cdot D_x f((\tfrac{1}{2},0),(\tfrac{1}{2},0)).$$

Es gilt $D_x f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x,y) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x,y) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 4x_2 \end{pmatrix}$,

also $D_x f((\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Daraus folgt

$$g'(\tfrac{1}{2},0) = -\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 32

a) f ist stetig diffbar als Komposition stetig diffbarer Funktionen. Es gilt

$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & -e^{-y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}$, also ist $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ wegen

$\det f'(0,0) = 1+1 \neq 0$ invertierbar. Ferner gilt $f(0,0) = (2,1)$. Laut dem Satz über lokale Invertierbarkeit gibt es damit offene Umgebungen U von $(0,0)$ und V von $(2,1)$ so, dass $f: U \to V$ bijektiv und $f^{-1}: V \to U$ stetig diffbar ist. Ferner gilt

$$(f^{-1})'(2,1) = \left(f'(0,0)\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wieder ist g als Komp. stetig db. Fkt. stetig diffbar. Aus $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ folgt für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sin y}{1+x^2} & (2+\arctan x)\cos y \\ -e^x \cos y & e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

Damit $\det g'(x,y) = \underbrace{\frac{e^x}{1+x^2}}_{>0} (\sin y)^2 + \underbrace{(2+\arctan x)e^x}_{>0} (\cos y)^2.$

Da sin und cos keine gemeinsamen Nullstellen besitzen, folgt $\det g'(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Laut dem Satz über lokale Invertierbarkeit gibt es also für alle (x,y) eine Umgebung U so, dass $g : U \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist.

g ist aber nicht global injektiv, da z.B.

$g(0,0) = g(0,2\pi) = (0,-1).$