8. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Lutz Weis, Martin Meyries

Abgabe bis Freitag, 10. Juni 2011, 12 Uhr

Aufgabe 29: Die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig partiell differenzierbar. Drücke für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Jacobi-Matrix $J_F(x, y)$ von

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) = f(h(xy), xg(x, y), y),$$

durch die partiellen Ableitungen von f, g und h aus.

Aufgabe 30:

a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, die Funktion $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ sei stetig auf ganz $\overline{U}$ und stetig differenzierbar auf U. Ferner sei die Jacobi-Matrix $J_f(x)$ an jedem Punkt $x \in U$ invertierbar. Zeige, dass $|f|_2$ ihr Maximum auf ∂U annimmt, d.h. es gibt ein $x_0 \in \partial U$ so, dass $|f(x_0)|_2 \geq |f(x)|_2$ für alle $x \in \overline{U}$.

b) Es sei $r > 0$. Zeige, dass für $g : \overline{B}(0, r) \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = e^{x_1}(\cos x_2, \sin x_2)$, die Funktion $|g|_2$ ihr Maximum auf der Sphäre $\partial B(0, r)$ annimmt.

Aufgabe 31 (K): Zeige, dass es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ mit $(1/2, 0) \in U \cap V$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}^2$ gibt so, dass für alle $(x, y) = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in U \times V$ das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2 = 0, \qquad x_1^2 + 2x_2^2 + 3y_1^2 + 4y_2^2 = 1,$$

genau dann erfüllt ist, wenn $y = g(x)$. Bestimme ferner $g'(1/2, 0)$.

Aufgabe 32 (K):

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(x, y) = (e^x + e^{-y}, e^{x+y})$. Zeige, dass es eine offene Umgebung U von $(0, 0)$ und eine offene Umgebung V von $(2, 1)$ gibt so, dass $f : U \to V$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist. Bestimme ferner $(f^{-1})'(2, 1)$.

b) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $g(x, y) = ((2 + \arctan x) \sin y, -e^x \cos y)$. Zeige, dass es um jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine Umgebung U gibt so, dass $g|_U$ injektiv ist. Ist g global, d.h. auf ganz $\mathbb{R}^2$, injektiv?

Anmeldung zur Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung Analysis I/II im Herbst 2011

Die schriftlichen Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfungen Analysis I/II im Herbst 2011 finden statt am

Dienstag, den 20. September 2011, von 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2).

Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich:

- Studierende eines **Bachelor**-Studiengangs melden sich über QISPOS an.
- Studierende des **Lehramts** besorgen sich die Zulassung zur Prüfung vom Prüfungsamt (Studienbüro) und melden sich bei Fr. Ewald in Zimmer 3A-26.1 im Allianzgebäude an.
- Sudierende eines **Diplom**-Studiengangs melden sich bei ihrem zuständigen Studienberater an: Herr Dr. Kühnlein (Mathematik), Herr Dr. Neher (Wirtschaftsmathematik) bzw. Herr Dr. Hettlich (Technomathematik).

Der **Anmeldeschluss** für alle Studierende ist

Freitag, der 29. Juli 2011.

Danach ist keine Anmeldung zur Klausur mehr möglich.