Lösungsvorschläge zur 9. Übung Analysis II

Aufgabe 33 Wir schreiben immer $f = u + iv$, mit $u, v : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) Real- und Imaginärteil von f, also $u(x,y) = \sin x \sin y$, $v(x,y) = -\cos x \cos y$, sind reell differenzierbar. Laut Vorlesung/Übung ist f genau dann komplex diffbar in $z = x + iy \in \mathbb{C}$, wenn die Cauchy-Riemann'schen DGL gelten:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x} v(x,y).$$

Es gilt $\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \cos x \sin y$, $\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = \sin x \cos y$, $\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = \sin x \cos y$, $\frac{\partial}{\partial y} v(x,y) = \cos x \sin x$. Also gilt überall $\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial y} v$. $\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x} v(x,y)$ gilt genau dann, wenn $\sin x \cos y = -\sin x \cos y$, also wenn $\sin x \cos y = 0$.

Dies ist erfüllt auf der Menge

$$M = \{ z = x + iy \in \mathbb{C} : x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ \underline{\text{oder}} \ y = (m + \tfrac{1}{2})\pi \ (m \in \mathbb{Z}) \}.$$

Damit ist f genau in den Punkten aus M komplex diffbar. Da M nicht offen ist, ist f auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph. Für $z \in M$ gilt

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = \cos x \sin y + i \underbrace{\sin x \cos y}_{=0, \text{ da } z \in M}$$

$$= \cos x \sin y = \cos(\operatorname{Re} z) \sin(\operatorname{Im} z).$$

b) f ist ein Polynom, und damit nach Bsp 1.3 aus der VL auf ganz $\mathbb{C}$ komplex diffbar, also auch auf jeder offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

c) Für $z \neq 0$ gilt $\frac{f(z)}{z} = \operatorname{Re} z$. Wäre also f in $z \neq 0$ komplex diffbar, dann wäre laut Quotientenregel auch die Abbildung $z \mapsto \operatorname{Re} z$ in $z \neq 0$ komplex diffbar, was laut Folgerung 1.6 aus der VL falsch ist. Also ist f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht komplex diffbar. Zu prüfen ist noch $z = 0$. Es gilt

$$f(z) = f(x,y) = (x + iy)x = x^2 + ixy,$$

also $f = u + iv$ mit $u(x,y) = x^2$ und $v(x,y) = xy$. u und v sind reell diffbar.

Es gilt $\frac{\partial}{\partial x}u(0,0)=0$, $\frac{\partial}{\partial y}u(0,0)=0$, $\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)=0$, $\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)=0$, also sind die Cauchy-Riemann DGL in $z=0$ erfüllt und f ist in $z=0$ komplex diffbar, mit $f'(0)=\frac{\partial}{\partial x}u(0,0)+i\frac{\partial}{\partial x}v(0,0)=0$.

f ist auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

d) • U ist offen in $\mathbb{C}$: Sei $z\in U$, also $\bar{z}\in M$. Da M offen gibt es $\varepsilon>0$ so, dass $w\in M$ falls $|\bar{z}-w|<\varepsilon$. Falls nun $|z-\alpha|<\varepsilon$ für ein $\alpha\in\mathbb{C}$ und dieses ε, folgt $|\bar{z}-\bar{\alpha}|=|\overline{z-\alpha}|=|z-\alpha|<\varepsilon$, also $\bar{\alpha}\in M$, d.h. $\alpha\in U$. Damit ist U offen.

• f ist auf U holomorph: Schreibe $g=a+ib$. Da g holomorph, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}a=\frac{\partial}{\partial y}b,\quad \frac{\partial}{\partial y}a=-\frac{\partial}{\partial x}b.$$

Ferner, da $f(z)=\overline{g(\bar{z})}$, $f(x,y)=a(x,-y)-ib(x,-y)$, also

$$u(x,y)=a(x,-y),\qquad v(x,y)=-b(x,-y).$$

Damit sind u,v reell diffbar, mit

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}a\right)(x,-y),\quad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=-\left(\frac{\partial}{\partial y}a\right)(x,-y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)=-\left(\frac{\partial}{\partial x}b\right)(x,-y),\quad \frac{\partial}{\partial y}v(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial y}b\right)(x,-y).$$

Da die Cauchy-Riemann DGL für a,b in M gelten, folgt daraus, dass sie für u,v in U gelten. Also ist f holomorph auf U, und insbesondere auch auf jeder offenen Teilmenge von U holomorph.

Für die Ableitung gilt

$$f'(z)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)+i\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}a\right)(x,-y)-i\left(\frac{\partial}{\partial x}b\right)(x,-y)$$

$$=\overline{g'(\bar{z})}.$$

Aufgabe 34

a) Da $\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v$ und $\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}v$ und u, v zweimal stetig reell diffbar sind, dürfen wir nochmal differenzieren und die part. Ableitungen vertauschen:

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}v - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}v = 0,$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2}{\partial x^2}v + \frac{\partial^2}{\partial y^2}v = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u = 0.$$

b) Nach a) ist $\Delta u(x,y) = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ notwendig dafür, dass u Realteil einer holomorphen Funktion ist. Es gilt

$$\Delta u(x,y) = 12x^2 + 2\lambda y^2 + 12y^2 + 2\lambda x^2$$
$$= (12 + 2\lambda)(x^2 + y^2),$$

und dies verschwindet genau dann für alle $x, y \in \mathbb{R}$, wenn $\lambda = -6$.

Betrachte also $u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$. Damit $f = u + iv$ holomorph, muss $\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v$, $\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}v$ gelten. Aus $\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = -4y^3 + 12x^2y.$$

Dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn

$$v(x,y) = -4xy^3 + 4x^3y + c(y),$$

mit einer diffbaren Funktion $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Einsetzen in $\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v$ ergibt

$$4x^3 - 12xy^2 = -12xy^2 + 4x^3 + c'(y),$$

also $c'(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, d.h. c ist konstant. Damit ist

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x+iy)^4 + ic = z^4 + ic$$

für alle $c \in \mathbb{R}$ eine holomorphe Funktion mit u als Realteil.

Dies sind aber alle solchen Funktionen, da jede andere holomorphe Funktion $\tilde{f}$, welche u als Realteil hätte, sich von f laut Folgerung 16 a) nur durch $\tilde{f} = f + w$, $w \in \mathbb{C}$ konstant, unterscheiden würde. Falls aber $\operatorname{Re} w \neq 0$, wäre $\operatorname{Re}\tilde{f} = u + \operatorname{Re} w \neq u$. Damit muss auch $\tilde{f}$ von der Form $\tilde{f}(z) = z^4 + ic$ sein.

Aufgabe 35 Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetig diffbare Kurve und $f : \gamma[a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, dann gilt per Definition $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{\text{Multiplikation in } \mathbb{C}} dt$,

wobei $\gamma'(t) = \left(\frac{d}{dt} \operatorname{Re} \gamma\right)(t) + i\left(\frac{d}{dt} \operatorname{Im} \gamma\right)(t) \in \mathbb{C}$ für $t \in [a,b]$.

a) Die geradlinige Verbindung von -1 nach i kann man durch die Kurve

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = -1 + t(1+i) = (t-1) + it,$$

beschreiben. Es gilt $\gamma'(t) = 1+i$ für alle $t \in [0,1]$, und ferner, wegen $\boxed{\bar{z}z^2 = \bar{z}z \cdot z = |z|^2 z}$

$$f(\gamma(t)) = \overline{\gamma(t)}\,(\gamma(t))^2 = |\gamma(t)|^2 \cdot \gamma(t)$$

$$= \left((t-1)^2 + t^2\right)(t-1+it)$$

$$= 2t^3 - 4t^2 + 3t - 1 + i(2t^3 - 2t^2 + t).$$

Damit $\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 \left(2t^3 - 4t^2 + 3t - 1 + i(2t^3 - 2t^2 + t)\right)(1+i)\,dt$

$$= (1+i)\left(\tfrac{2}{4} - \tfrac{4}{3} + \tfrac{3}{2} - 1 + i\left(\tfrac{2}{4} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}\right)\right) = -\tfrac{2}{3}.$$

b) Für $\gamma(t) = e^{i(\pi - t)} = \cos(\pi - t) + i\sin(\pi - t)$ gilt

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \sin(\pi - t) - i\cos(\pi - t) = -i(\cos(\pi - t) + i\sin(\pi - t))$$

$$= -ie^{i(\pi - t)},$$

sowie $f(\gamma(t)) = \overline{e^{i(\pi - t)}}\left(e^{i(\pi - t)}\right)^2 = e^{-i(\pi - t)} e^{2i(\pi - t)} = e^{i(\pi - t)}$.

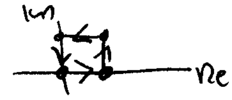
Damit $\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(\pi - t)}\left(-ie^{i(\pi - t)}\right)dt$

$$= -i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2it}\,dt.$$

Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(-2t)}dt \overset{\text{def.}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re} e^{i(-2t)}dt + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Im} e^{i(-2t)}dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(-2t)dt + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(-2t)dt = -i,$$

also $\int_\gamma f(z)dz = (-i)(-i) = -1$.

c) Die Eckpunkte des Quadrats sind $0, 1, 1+i, i$. 

Eine Kurve, welche in $z=0$ startet und den Rand des Quadrats gegen den Uhrzeigersinn durchläuft, ist

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1], \\ 1+i(t-1), & t \in [1,2] \\ 3-t+i, & t \in (2,3], \\ i(4-t), & t \in [3,4]. \end{cases}$$

Da γ nur stückweise stetig diffbar ist, gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 t e^t \,dt + \int_1^2 (1+i(t-1))\, e^{1+i(t-1)}\, i \,dt + \int_2^3 (3-t+i)\, e^{3-t+i} (-1)\,dt$$

$$+ \int_3^4 i(4-t)\, e^{i(4-t)} (-i)\,dt.$$

Direktes Nachrechnen ergibt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Aufgabe 36

Es gilt $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ für $x,y \in \mathbb{R}$, also $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$ und $v \equiv 0$.

Da $u(x,0) = 0$ und $u(0,y) = 0$ ist u in $(x,y) = (0,0)$ partiell diffbar, mit $\frac{\partial}{\partial x} u(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} u(0,0) = 0$. Da $v \equiv 0$, sind die Cauchy-Riemann-DGL in $z = 0$ erfüllt. f ist in $z=0$ nicht komplex diffbar, da f als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\sqrt{|xy|}, 0)$, nicht (total) differenzierbar ist: Für $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, gilt

$$\frac{1}{h}\left(f\left(\tfrac{h}{\sqrt{2}}, \tfrac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)\right) = \frac{|h|/\sqrt{2}}{h} = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & h > 0, \\ -1/\sqrt{2}, & h < 0, \end{cases}$$

d.h. die Richtungsableitung von f in $(0,0)$ in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ existiert nicht. Damit kann f in $(0,0)$ nicht diffbar sein.

Da die reelle Diffbarkeit von f zusätzlich zu den Cauchy-Riemann DGL in Satz 1.5 gefordert wurde, ist dies kein Widerspruch zu Satz 1.5.