# 9. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Lutz Weis, Martin Meyries

**Abgabe bis Freitag, 17. Juni 2011, 12 Uhr**

**Aufgabe 33 (K):** In welchen Punkten $z = x + \mathrm{i}y \in U$ ist die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wo ist $f$ holomorph? Bestimme gegebenenfalls $f'(z)$.

a) $f(z) = \sin x \sin y - \mathrm{i} \cos x \cos y, \quad U = \mathbb{C};$

b) $f(z) = 3z^3 - \mathrm{i}z^2 + 2\mathrm{i}z + 1, \quad U = \mathbb{C};$

c) $f(z) = z \operatorname{Re} z, \quad U = \mathbb{C};$

d) $f(z) = \overline{g(\overline{z})}, \quad U = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \overline{z} \in M\}$, für eine offene Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $g : M \to \mathbb{C}$.

**Aufgabe 34:**

a) Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f = u + \mathrm{i}v : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $u, v$ seien zweimal stetig reell differenzierbar. Zeige, dass $u$ und $v$ harmonisch sind, d.h. $\Delta u = 0$ und $\Delta v = 0$.

b) Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist
$$u(x, y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2$$
Realteil einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ? Bestimme für dieses $\lambda$ alle holomorphen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die $u$ als Realteil haben.

**Aufgabe 35 (K):** Berechne jeweils das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

a) $f(z) = \overline{z} z^2, \quad \gamma$: geradlinige Verbindung von $-1$ nach i;

b) $f(z) = \overline{z} z^2, \quad \gamma(t) = e^{\mathrm{i}(\pi - t)}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

c) $f(z) = z e^z, \quad \gamma$: läuft einmal gegen den Uhrzeigersinn entlang des Randes von $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0, 1)\}$, startend in $z = 0$.

**Aufgabe 36:** Zeige, dass die Funktion
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|},$$
in $z = 0$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, dort aber nicht komplex differenzierbar ist. Warum widerspricht das nicht Satz 1.5 aus der Vorlesung?