Lösungsvorschläge zur 10. Übung Analysis II

Aufgabe 37

a) Angenommen, es gebe ein $w_0 \in \mathbb{C}$ so, dass $|f(z)-w_0| \geq \varepsilon_0$ für ein $\varepsilon_0 > 0$. Laut Quotientenregel ist dann die Funktion

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{1}{f(z)-w_0},$$

auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Ferner gilt $|g(z)| = \dfrac{1}{|f(z)-w_0|} \leq \dfrac{1}{\varepsilon_0}$, d.h. g ist beschränkt auf $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Liouville ist g also konstant, woraus folgt, dass f konstant ist. ↯.

b) Angenommen, $P(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}$. Laut Aufg 1 gibt es $r, C > 0$ so, dass $|P(z)| \geq C$ für alle $|z| > r$. Laut Annahme ist $\frac{1}{P}$ stetig auf $\overline{B}(0,r)$, woraus $\sup\limits_{|z| \leq r} \left|\frac{1}{P(z)}\right| < \infty$ folgt. Insgesamt ist $\frac{1}{P}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und $\left|\frac{1}{P}\right|$ beschränkt durch $\max\left\{\frac{1}{C}, \sup\limits_{|z|\leq r}\left|\frac{1}{P(z)}\right|\right\}$. Nach Liouville muss $\frac{1}{P}$ konstant sein ↯.

Aufgabe 38

Nein, so eine Funktion gibt es nicht.

Beweis: f, $\sin$ sind holomorph auf $\mathbb{C}$, und die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} : f(z) = \sin z\} \supseteq \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

besitzt den Häufungspunkt $z_0 = 0$ (da $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$). Also müsste $f(z) = \sin z \;\; \forall z \in \mathbb{C}$ gelten. Nach Voraussetzung also

$$\sin(1) = f(1) = f(-1) = \sin(-1).$$

Da aber $\sin(1) \neq \sin(-1)$, ist dies ein Widerspruch.

Aufgabe 39

a) $$f_1(z) = \frac{z^2+1}{z-i} = \frac{(z+i)(z-i)}{z-i} = z+i \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$$

Dies ist die Potenzreihenentwicklung von f_1 um $z_0=0$: Es gilt
$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_0=0$, $a_1=1$, $a_n=0$ $\forall n \geq 2$.

b) Für $z \neq i$ gilt $f_2(z) = \frac{z^2+2}{z-i} = \frac{(z^2+2)i}{1+iz} = (z^2+2)i \, \frac{1}{1-(-iz)}$.

Laut geometrischer Reihe gilt für $|z|<1$
$$\frac{1}{1-(-iz)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n,$$
und die Reihe konvergiert für $|z|<1$ absolut in $\mathbb{C}$. Wir dürfen also den Umordnungssatz anwenden:
$$f_2(z) = (z^2+2)i \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n = z^2 i \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n + 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} i(-i)^{n-2} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2i(-i)^n z^n$$
$$= 2i(-i)^0 z^0 + 2i(-i)^1 z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(i(-i)^{n-2} + 2i(-i)^n \right) z^n$$
$$= 2i + 2z + \sum_{n=2}^{\infty} i(-i)^n z^n.$$

c) Durch Partialbruchzerlegung erhält man
$$\frac{z+3}{(z-1)(z-4)} = \frac{-4/3}{z-1} + \frac{7/3}{z-4},$$
und in der Übung wurde $\frac{1}{z-w} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{(w-2)^{n+1}}$ für $z \neq w$ gezeigt. Damit
$$f_3(z) = -\frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{(1-2)^{n+1}} - \frac{7}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{(4-2)^{n+1}}$$
$$\overset{\text{Umordnung}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}(-1)^n - \frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) (z-2)^n.$$

d) Wegen $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$ gilt
$$f_4(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}\right) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1+i)z)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1-i)z)^n}{n!} \right)$$
$$\overset{\text{Umordnung}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i\,n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^n - \left(\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}\right)^n}{2i\,n!} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \frac{e^{in\pi/4} - e^{-in\pi/4}}{2i} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \sin(n\pi/4)}{n!} z^n .$$

Aufgabe 40

a) Es gilt $\frac{e^z}{z^2+2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z+2}\right)$ für $z \neq 0,\ z \neq -2$, und damit, nach der Cauchy-Integralformel,

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz = \frac{1}{2}\left(\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z}\,dz - \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z+2}\,dz\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi i\, e^z\big|_{z=0} - 2\pi i\, e^z\big|_{z=-2}\right) = \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)\pi i .$$

b) Laut Cauchy-Integralformel für Ableitungen, angewandt auf $f(z) = e^{2z}$, gilt

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz = \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z+1)^4}\,dz = 2\pi i \frac{f'''(-1)}{3!}$$

$$= 2\pi i \frac{8e^{2z}}{6}\Big|_{z=-1} = \frac{8\pi i}{3e^2} .$$

c) Setze $f(z) = ze^{iz}$, dann $f''(z) = (2i - z)e^{iz}$. Wie eben gilt

$$\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz = 2\pi i \frac{f''(\pi)}{2!} = \pi i (2i - z)e^{iz}\big|_{z=\pi} = 2\pi + i\pi^2 .$$

d) Die Nullstelle $z_0 = 7$ des Nenners liegt außerhalb von $B(0,6) \supset \{|z-2| = 3\}$, und der Integrand ist dort holomorph. Damit ist der Cauchy-Integralsatz anwendbar, und es folgt

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z} \sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{2011}}\,dz = 0 .$$