Lösungsvorschläge zur 11. Übung Analysis

Aufgabe 41

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph.

- $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ $(a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C})$ impliziert $|f(z)| \leq a|z|^n + b$ für geeignete $a, b > 0$:

Setze $a := |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$. Dann gilt für $|z| \geq 1$:

$$|f(z)| \leq |a_n z^n| + \ldots + |a_1 z| + |a_0| \leq |a_n|\,|z|^n + \ldots + |a_1|\,|z|^n + |a_0|\,|z|^n$$
$$= a\,|z|^n.$$

Da f stetig und $\overline{B}(0,1)$ kompakt gilt ferner $b = \max_{z \in \overline{B}(0,1)} |f(z)| < \infty$, also $|f(z)| \leq b$ für $|z| \leq 1$. Insgesamt folgt $|f(z)| \leq a|z|^n + b$.

- $|f(z)| \leq a|z|^n + b$ impliziert $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ $(a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C})$:

Sei $r > 0$ gegeben. Nach Satz 3.3 können wir, da f holomorph auf $\mathbb{C}$ ist, f in $B(0,r)$ in eine Potenzreihe entwickeln, d.h.

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \qquad z \in B(0,r), \; (a_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}.$$

Für $R > r$ können wir f auch entwickeln,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j, \qquad z \in B(0,R), \; (b_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}.$$

Da beide Darstellungen auf $B(0,r)$ übereinstimmen, folgt aus dem Identitätssatz: $a_j = b_j \;\; \forall j \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \qquad \underline{\underline{\forall z \in \mathbb{C}}}.$$

Für alle $r > 0$ gilt ferner die Abschätzung (siehe Vorlesung)

$$|a_j| \leq \frac{\sup\{|f(z)| : |z| = r\}}{r^j}.$$

Da $|f(z)| \leq a|z|^n + b$, folgern wir

$$|a_j| \leq \frac{a r^n + b}{r^j}, \qquad \forall r > 0.$$

Falls $j > n$ ist dies nur möglich, wenn $a_j = 0$. Damit $f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$.

Aufgabe 42

• Direkte Berechnung von $\int_{|z|=1} e^{iz}\,dz$: Setze $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Dann

$$\int_{|z|=1} e^{iz}dz \overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} e^{i\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} e^{ie^{it}}\, i e^{it}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} \exp(i(\cos t + i\sin t))\, e^{it}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\, e^{i(\cos t + t)}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\big(\cos(t+\cos t) + i\sin(t+\cos t)\big)\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\cos(t+\cos t)\,dt - \int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\sin(t+\cos t)\,dt.$$

Da aber $z\mapsto e^{iz}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, gilt $\int_{|z|=1} e^{iz}dz = 0$, d.h. Real- und Imaginärteil verschwinden beide! Damit

$$\int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\cos(t+\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\sin(t+\cos t)\,dt = 0.$$

Aufgabe 43

Setze $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Wir suchen ein f, welches

$$(\cos t)^{24} = f(\gamma(t))\,\gamma'(t) = f(\gamma(t))\, i\gamma(t),\quad t\in[0,2\pi],$$

erfüllt. Es gilt

$$(\cos t)^{24} = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{24} = \frac{1}{i\gamma(t)}\left(\frac{\gamma(t)+\frac{1}{\gamma(t)}}{2}\right)^{24}\underbrace{i\gamma(t)}_{=\gamma'(t)},\quad t\in[0,2\pi].$$

Setze also $f(z) = \frac{1}{iz}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^{24}$, dann gilt

$$\int_0^{2\pi}(\cos t)^{24}dt = \int_{|z|=1} f(z)dz = \frac{1}{i\,2^{24}}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{24}dz.$$

Laut Binomischer Formel gilt

$$\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{24} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{24}\binom{24}{k} z^{24-k}\left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{24}\binom{24}{k} z^{24-2k-1},$$

und laut Vorlesung

$$\int_{|z|=1} z^m \, dz = \begin{cases} 2\pi i, & m=-1, \\ 0, & m \neq -1, \end{cases}$$

Da $2n-2k-1=-1$ äquivalent ist zu $n=k$, folgt

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{|z|=1} z^{2n-2k-1} dz = \binom{2n}{n} 2\pi i .$$

Also $$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt = \frac{1}{i\, 2^{2n}} \binom{2n}{n} 2\pi i = \underline{\underline{\frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}}}.$$

Aufgabe 44 $\boxed{\text{Nenne jeden auftretenden Integranden } f.}$

a) f ist auf $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ holomorph, $z=\pm i$ sind jeweils Pole erster Ordnung und werden von $\{|z|=2\}$ jeweils einmal umlaufen, d.h. $n(\{|z|=2\}, \pm i)=1$. Also laut Residuensatz

$$\int_{|z|=2} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}(f,i) + \operatorname{res}(f,-i)\right)$$

Es gilt

$$\operatorname{res}(f,i) = \frac{(z-i)f(z)}{0!}\Big|_{z=i} = \frac{(z-i)\cos z}{(z+i)(z-i)}\Big|_{z=i} = \frac{\cos z}{z+i}\Big|_{z=i} = \frac{\cos i}{2i},$$

und genauso

$$\operatorname{res}(f,-i) = \frac{(z+i)f(z)}{0!}\Big|_{z=-i} = -\frac{\cos i}{2i} = -\operatorname{res}(f,i).$$

Damit $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,dz = \underline{\underline{0}}.$

b) Die Nullstellen des Nenners $e^{iz}-1$ sind genau $\{2\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$, außerhalb dieser Menge ist f holomorph. Innerhalb des Einheitskreises $\{|z|=1\}$ liegt nur die Singularität $z_0=0$. Laut Residuensatz also

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(f,0).$$

Es gilt $$f(z) = \frac{z}{e^{iz}-1} = \frac{z}{\left(1+iz+\frac{1}{2}(iz)^2+\ldots\right)-1} = \frac{1}{i-\frac{1}{2}z+\ldots},$$

d.h. $z_0=0$ ist eine hebbare Singularität. Damit $c_{-n}=0$ für alle Koeffizienten der Terme mit negativen Potenzen in der Laurent-Entwicklung von f um $z_0=0$. Insbesondere $c_{-1} = \operatorname{res}(f,0)=0$, also

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1}\,dz = \underline{\underline{0}}.$$

---

c) Der geschlossene Kreis mit Radius 2 umläuft die Polstellen i und 1 jeweils einmal, die Polstelle -3 nicht. Damit

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{res}(f,i) + \operatorname{res}(f,1)\right).$$

Nach Lemma 4.6 gilt, da die Pole jeweils von 1. Ordnung sind,

$$\operatorname{res}(f,i) = (z-i)f(z)\Big|_{z=i} = \frac{z}{(z-1)(z+3)}\Big|_{z=i} = \frac{i}{(i-1)(i+3)} = \frac{i}{2i-4}$$

$$\operatorname{res}(f,1) = (z-1)f(z)\Big|_{z=1} = \frac{z}{(z-i)(z+3)}\Big|_{z=1} = \frac{1}{4-4i},$$

also $$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{i}{2i-4} + \frac{1}{4-4i}\right) = \frac{3}{2}\pi + i\,\frac{9}{20}\pi.$$