11. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Lutz Weis, Martin Meyries

Abgabe bis Freitag, 1. Juli 2011, 12 Uhr

Aufgabe 41: Zeige, dass eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann ein Polynom vom Grad höchstens $n \in \mathbb{N}$ ist, wenn es Konstanten $a, b > 0$ gibt so, dass $|f(z)| \leq a|z|^n + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 42: Berechne den Wert des Kurvenintegral $\int_{|z|=1} e^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z$, sowohl direkt, als auch mit dem Cauchy'schen Integralsatz. Folgere daraus die Identitäten

$$\int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\cos(t+\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\sin(t+\cos t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Aufgabe 43 (K): Bestimme für alle $n \in \mathbb{N}$ den Wert des Integrals

$$I_n = \int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t$$

durch geeignete Wahl einer Funktion f mit $I_n = \int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z$.

Aufgabe 44 (K): Berechne die folgenden Kurvenintegrale mit Hilfe des Residuensatzes.

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$; b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{\mathrm{i}z}-1}\,\mathrm{d}z$; c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z}{(z-\mathrm{i})(z-1)(z+3)}\,\mathrm{d}z$.