Lösungsvorschläge zur 12. Übung Analysis II

Aufgabe 45

a) Schreibe das AWP als

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(0) = \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

mit $y = (y_1, y_2)$, $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, wobei

$$f_1(s,x) = -s^2 x_1 + \sin(s) x_2, \quad f_2(s,x) = 3s x_2 + e^s x_1, \quad s \in \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Als Komposition stetig diffbarer Fkt ist f stetig diffbar, insbesondere lokal Lipschitz-stetig nach Bsp 1.5 a). Nach Picard-Lindelöf existiert also zu jedem AW $\xi \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige lokale Lösung

$$y : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^2$$

des AWP, wobei $\delta > 0$. Um zu zeigen, dass y auf ganz $\mathbb{R}$ und nicht nur auf einem endlichen (Zeit-)Intervall definiert ist, schätzen wir ab:

$$|f(s,x)|_2 \leq |f(s,x)|_1 \leq s^2 |x_1| + |\sin(s)||x_2| + 3|s||x_2| + e^s |x_1|$$

$$\leq C(R) |x|_1 \leq \tilde{C}(R) |x|_2 \qquad \text{für } s \in [-R, R],\ R > 0.$$

Die globale Existenz der Lösung y für jeden AW ξ folgt aus

b) Schreibe das AWP als $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = \xi$, mit

$$f_1(s,x) = e^{-s x_2^2} + \sin(x_1), \quad f_2(s,x) = \cos(x_1) + 2s x_2,$$

für $s \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Wieder ist $f = (f_1, f_2)$ stetig diffbar auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, nach Picard-Lindelöf gibt es zu jedem AW $\xi \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige lokale Lösung $y : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^2$ des AWP, für ein $\delta > 0$.

<u>Zur globalen Existenz:</u> Gedacht war $f_1(s,x) = \underline{\underline{e^{-(s x_2)^2}}} + \sin(x_1)$, hier wurden auf dem Aufgabenblatt also leider die Klammern <u>vergessen.</u>
<u>Mit</u> den Klammern erhält man die globale Existenz der Lösungen wie in a).

$$|f(s,x)|_2 \le |f(s,x)|_1 \le \underbrace{e^{-(s x_2)^2}}_{\le 1} + \underbrace{|\sin(x_1)|}_{\le 1} + \underbrace{|\cos(x_1)|}_{\le 1} + 2|s|\,|x_2|$$

$$\le 3 + 2|s|\,|x_2| \le C(R)(1+|x|_2)$$

für $s \in [-R,R]$, $R>0$.

Ohne die Klammern existieren die Lösungen aber auch global. Das sieht man so:

Die 2. Komponente y_2 ist Lsg von

$$y_2'(t) = \underbrace{\cos(y_1(t))}_{\in[-1,1]} + 2t\,y_2(t) =: \tilde{f}_2(t, y_2(t)).$$

Hierbei fassen wir y_1 als gegebene Funktion auf. Solange (y_1, y_2) existiert, gilt $|\tilde{f}_2(t,y_2(t))| \le 1 + 2t\,|y_2(t)|$, nach dem Satz aus der VL bleibt y_2 also beschränkt auf endlichen Zeitintervallen. Da aber

$$y_1'(t) = e^{-t y_2(t)^2} + \sin(y_1(t)) =: \tilde{f}_1(t, y_1(t)),$$

und wir nun y_2 als beschränkte gegebene Fkt auffassen können, bleibt y_1 (solange es existiert) beschränkt auf endlichen Zeitintervallen:

$$|\tilde{f}_1(t, y_1(t))| \le 2.$$

Da (f_1, f_2) überall definiert ist und wir die "Explosion" einer Lsg ausgeschlossen haben, ist eine Lsg laut VL global.

Aufgabe 46

a) Schreibe $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = \xi$, mit $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(s,x) = x^3 + t\sin(t) + e^x$.
f ist stetig partiell diffbar, insbesondere lokal Lipschitz. Picard-Lindelöf garantiert für jeden AW ξ, dass das AWP eine eindeutige lokale Lösung $y: [-\delta,\delta] \to \mathbb{R}$ besitzt (mit $\delta > 0$).

b) Die Funktion $x \mapsto \sqrt{|x|}$ ist in $x=0$ <u>nicht</u> lokal Lipschitz-stetig, Picard-Lindelöf ist <u>nicht</u> anwendbar. Tatsächlich hat das AWP $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$, $y(0) = 0$, die verschiedenen Lösungen $y \equiv 0$ und

$$y: \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{4}t^2, & t > 0, \end{cases}$$

was man durch Einsetzen in $y' = \sqrt{|y|}$ sieht und durch Ausprobieren rausfindet. Für den AW $\xi = 0$ ist das AWP also zwar lösbar, aber nicht <u>eindeutig</u>.
Die Abbildung $x \mapsto \sqrt{|x|}$ ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig diffbar, insbesondere gibt es für jeden AW $\xi \neq 0$ eine Umgebung, auf der $x \mapsto \sqrt{|x|}$ lokal Lipschitz ist. Es folgt die eindeutige lokale Lösbarkeit des AWP für $\xi \neq 0$.

c) Auf $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ist f stetig diffbar, also gibt es für alle AW $\xi \neq 0$ eine Umgebung von $(0,\xi)$, auf der f lokal Lipschitz-stetig bzgl der 2. Komponenten ist. Für AW $\xi \neq 0$ ist das AWP also eindeutig lokal lösbar.
Um $x=0$ herum ist die lokale Lipschitz-Stetigkeit von f wegen der abschnittsweisen Definition nicht so klar. Wir müssen den Differenzenquotienten beachten: Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\frac{1}{h}(f(s,0+h)-f(s,0))\right| = \frac{1}{|h|}\sin^2(sh)\underbrace{|\cos(s/h)|}_{\leq 1}$$

$$\leq \underbrace{\frac{|\sin(sh)|}{|h|}}_{\substack{\to |s| \text{ für } h\to 0 \\ \text{nach L'Hospital}}} \underbrace{|\sin(sh)|}_{\substack{\to 0 \\ \text{für } h\to 0}} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Damit ist $f(s,\cdot): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ für jedes $s\in\mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar, mit Ableitung

$$D_x f(s,x) = \begin{cases} 2s\sin(sx)\cos(sx)\cos(s/x)+\frac{s}{x^2}\sin^2(sx)\cos(s/x), & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

Da $\frac{\sin^2(sx)}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} s^2$ nach L'Hospital, und da $D_x f$ stetig bzgl. s ist, ist $D_x f$ beschränkt auf $[-\delta,\delta]\times[-r,r]$, $\delta,r>0$.

Aus dem Schrankensatz folgt für $s\in[-\delta,\delta]$ und $x,y\in[-r,r]$, dass

$$|f(s,x)-f(s,y)| \leq \underbrace{\sup_{\substack{s\in[-\delta,\delta], \\ \xi\in[-r,r]}} |D_x f(\xi)|}_{=: L<\infty} |x-y|.$$

f ist also stetig und lokal Lipschitz bzgl. x auf $[-\delta,\delta]\times[-r,r]$, nach Picard-Lindelöf existiert also auch für $\xi=0$ eine eindeutige lokale Lsg des AWP.

Aufgabe 47

a) Schreibe das AWP als $y'(t)=g(t)\,h(y(t))$, $y(0)=1$, mit $g(t)=e^{2t}$, $h(x)=\sqrt{1+x^2}$. g ist stetig diffbar auf $\mathbb{R}$, h ist stetig diffbar auf einer Umgebung des AW $\xi=1$. Nach Picard-Lindelöf ist das AWP eindeutig lokal lösbar. Da $h(1)=\sqrt{2}\neq 0$, erfüllt die lokale Lsg $y:[-\delta,\delta]\to\mathbb{R}$ die Gleichung

$$\int_1^{y(t)} \frac{1}{h(a)}\,da = \int_0^t g(b)\,db,$$ solange t nahe genug bei 0.

Es gilt $$\int_1^{y(t)} \frac{1}{h(a)}\,da = \int_1^{y(t)} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\,da = \sqrt{1+a^2}\,\Big|_1^{y(t)} = \sqrt{1+y(t)^2} - \sqrt{2},$$

Hier benötigt man, dass $y(t) \geq 0$ ist, was man wegen $y(0)=1$ und der Stetigkeit von y für t nahe Null annehmen kann.

$$\int_0^t g(b)\,db = \frac{1}{2}e^{2b}\Big|_0^t = \frac{1}{2}(e^{2t}-1).$$ Damit

$$\sqrt{1+y(t)^2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}.$$

Da $\sqrt{2} + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, können wir dies auflösen zu

$$y(t)^2 = \left(\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1.$$

Für t nahe bei 0 ist $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 > 0$, wir können dies auflösen zu

$$y(t) = \sqrt{\left(\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1}.$$

Dies ist die explizite Darstellung der lokalen Lösung y. Der Radikant ist positiv für $t \geq 0$, die Lösung existiert also auf $[0,\infty)$, d.h. $\boxed{t_+ = \infty}$.
Durch Auflösen sieht man, dass der Radikant bei $t = \frac{\ln(3-2\sqrt{2})}{2} < 0$ verschwindet: dort hört die Lsg auf zu existieren. Damit $\boxed{t_- = \frac{\ln(3-2\sqrt{2})}{2}}$.

b) Schreibe wieder $y'(t) = g(t)\,h(y(t))$, $y(0) = \xi$, mit $g \equiv a > 0$ und $h(x) = x^\alpha$. Nach Picard-Lindelöf ist das AWP eindeutig lokal lösbar, die Lsg $y : [-\delta,\delta] \to \mathbb{R}$ erfüllt

$$\int_\xi^{y(t)} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_0^t a\,db = at,$$

solange t nahe genug bei 0 (da $h(\xi) \neq 0$ wg. $\xi > 0$). Es gilt

$$\int_\xi^{y(t)} x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\,x^{1-\alpha}\Big|_\xi^{y(t)} = \frac{1}{1-\alpha}\left(y(t)^{1-\alpha} - \xi^{1-\alpha}\right).$$

Damit erhalten wir

$$y(t) = \left(a(1-\alpha)t + \xi^{1-\alpha}\right)^{\alpha-1}$$

solange wir die $(\alpha-1)$-te Wurzel ziehen können, also solange $a(1-\alpha)t + \xi^{1-\alpha} > 0$, d.h. wegen $1-\alpha < 0$ für

$$t \in \left(-\infty, \frac{\xi^{1-\alpha}}{a(\alpha-1)}\right).$$

Da die Lsg. außerhalb dieses Zeitintervalls aufhört zu existieren, folgt $\boxed{t_- = -\infty}$ und $\boxed{t_+ = \frac{\xi^{1-\alpha}}{a(\alpha-1)}} > 0$.

Aufgabe 48

a) Wir argumentieren mit Widerspruch. Angenommen $u'(t) \not\to 0$ für $t \to \infty$, d.h. es gibt eine streng monoton wachsende Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ und ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass

$$|u'(t_k)| \geq \varepsilon_0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ $u'(t_k) \geq \varepsilon_0$, oder für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt $-u'(t_k) \geq \varepsilon_0$. (Sonst hätte (t_k) nur endlich viele Elemente).
Im Folgenden nehmen wir an, dass es eine Teilfolge von (t_k) gibt, die wir wieder mit (t_k) bezeichnen, für die gilt:

$$u'(t_k) \geq \varepsilon_0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Im anderen Fall läuft die folgende Argumentation analog.

Da u' gleichmäßig stetig gibt es ein $\eta > 0$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|u'(t) - u'(t_k)| \leq \varepsilon_0/2 \quad \text{falls } t \in [t_k - \eta, t_k + \eta].$$

Daraus folgt

$$u'(t) = u'(t) - u'(t_k) + u'(t_k) \geq -|u'(t) - u'(t_k)| + u'(t_k)$$

$$\geq -\varepsilon_0/2 + \varepsilon_0 = \varepsilon_0/2 \quad \text{für alle } t \in [t_k - \eta, t_k + \eta],\ k \in \mathbb{N}.$$

Da $u(t) \xrightarrow{t\to\infty} u_0$ gibt es ein $T > 0$ so, dass

$$|u_0 - u(t)| \leq \frac{\eta \varepsilon_0}{4} \quad \text{für } t \geq T,$$

also $v(t)-v_0 \geq -\frac{\eta\varepsilon_0}{4}$ und $v_0 - v(t) \geq -\frac{\eta\varepsilon_0}{4}$ für $t \geq T$.

Da $t_k \nearrow \infty$ dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $t_k - \eta, t_k + \eta \geq T$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit dem Hauptsatz erhalten wir

$$v(t_k) - v_0 = v(t_k) - v(t_k - \eta) + v(t_k - \eta) - v_0$$

$$\geq \int_{t_k-\eta}^{t_k} \underbrace{v'(s)}_{\geq \frac{\varepsilon_0}{2}} ds - \frac{\eta\varepsilon_0}{4} \geq \eta \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\eta\varepsilon_0}{4} = \frac{\eta\varepsilon_0}{4},$$

sowie $v_0 - v(t_k) = v_0 - v(t_k + \eta) + v(t_k+\eta) - v(t_k)$

$$\geq -\frac{\eta\varepsilon_0}{4} + \int_{t_k}^{t_k+\eta} \underbrace{v'(s)}_{\geq \frac{\varepsilon_0}{2}} ds \geq \frac{\eta\varepsilon_0}{4},$$

insgesamt also $|v_0 - v(t_k)| \geq \frac{\eta\varepsilon_0}{4}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir haben damit eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gefunden, für die $v(t_k) \not\to v_0$ gilt $\lightning$

b) Die Funktion $y = (y_1, \dots, y_n)$ erfüllt für $f = (f_1, \dots, f_n)$ die Gleichungen

$$y_1'(t) = f_1(y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad \dots, \quad y_n'(t) = f_n(y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad t \geq 0.$$

Mit $y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ haben wir laut Annahme

$$y_1(t) \xrightarrow{t\to\infty} y_{0,1}, \quad \dots, \quad y_n(t) \xrightarrow{t\to\infty} y_{0,n}.$$

Da konvergente Folgen beschränkt sind, gibt es ein $R > 0$ so, dass

$$y(t) \in \overline{B}(0, R) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Da stetige Fkt auf kompakta gleichmäßig stetig sind, sind $f_1, \dots, f_n$ auf $\overline{B}(0,R)$ glm. stetig. Ferner ist jedes y_i, $i = 1, \dots, n$, glm stetig auf $[0, \infty)$, aus folgendem Grund: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $T > 0$ so, dass $|y_i(t) - y_{0,i}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $t \geq T$. Dann $|y_i(t_1) - y_i(t_2)| \leq \varepsilon$ (sogar) für alle $t_1, t_2 \geq T$.

Da $[0, T]$ kompakt, ist y_i auch auf $[0,T]$ glm stetig.

Wir erhalten also, dass $y_i' = f_i \circ y$, $i = 1, \dots, n$, als Komposition glm. stetiger Fkt. glm stetig ist. Nach a) also $y_i'(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

für alle i, und da f stetig, folgt

$$f(x) = f(\lim_{t\to\infty} y(t)) = \lim_{t\to\infty} f(y(t)) = \lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$$

$\blacksquare$