12. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Lutz Weis, Martin Meyries

Abgabe bis Freitag, 8. Juli 2011, 12 Uhr

Aufgabe 45 (K): Zeige, dass die folgenden Anfangswertprobleme für jeden Anfangswert $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige globale Lösung besitzen.

a) $y_1'(t) = -t^2 y_1(t) + \sin(t) y_2(t), \quad y_2'(t) = 3t y_2(t) + e^t y_1(t), \quad y_1(0) = \xi_1,\ y_2(0) = \xi_2\,;$

b) $y_1'(t) = e^{-t y_2(t)^2} + \sin(y_1(t)), \quad y_2'(t) = \cos(y_1(t)) + 2t y_2(t), \quad y_1(0) = \xi_1,\ y_2(0) = \xi_2\,.$

Aufgabe 46: Besitzen die folgenden Anfangswertprobleme für jeden Anfangswert $\xi \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $y : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ für ein $\delta > 0$?

a) $y'(t) = y(t)^3 + t \sin(y(t)) + e^{y(t)}, \quad y(0) = \xi\,;$

b) $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \quad y(0) = \xi\,;$

c) $y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = \xi, \quad \text{wobei } f(s,x) = \begin{cases} \sin^2(sx)\cos(s/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 47 (K): Bestimme durch Trennung der Variablen die explizite Lösung der folgenden Anfangswertprobleme. Ermittle daraus deren maximale Existenzzeiten t_- und t_+.

a) $y'(t) = e^{2t}\sqrt{1 + y(t)^{-2}}, \quad y(0) = 1\,;$

b) $y'(t) = a y(t)^\alpha, \quad y(0) = \xi, \quad$ wobei $\alpha > 1$ und $a, \xi > 0$.

Aufgabe 48:

a) Die Funktion $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, die Ableitung u' sei gleichmäßig stetig und es gelte $u(t) \to u_0 \in \mathbb{R}$ für $t \to \infty$. Zeige, dass $u'(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

b) Nun sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und erfülle $y'(t) = f(y(t))$ für $t \geq 0$. Zeige: Gilt $y(t) \to y_0 \in \mathbb{R}^n$ für $t \to \infty$, dann folgt $f(y_0) = 0$.