Lösungsvorschläge zur 13. Übung Analysis II

Aufgabe 49

Da $AB = BA$ gilt für $n \geq 1$, wie bei der binomischen Formel,

$$(A+B)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \underset{j=n-k}{=} n! \sum_{k+j=n} \frac{1}{k!\,j!} A^k B^j.$$

Wegen $(A+B)^0 = \mathrm{id}$ gilt die Formel auch für $n=0$. Damit

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+j=n} \frac{1}{k!\,j!} A^k B^j$$

$$\underset{\text{Produkt}}{\overset{\text{Cauchy-}}{=}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^j\right) = e^A \cdot e^B.$$

Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die nicht kommutieren, ist die Formel i.a. falsch.

Bsp für $n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Dann $\quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA,$

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix},$$

$$e^{A+B} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \ldots.$$

Der Vergleich der exp-Reihe mit den Summanden rechts oben zeigt, dass $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Aufgabe 50

Berechne zunächst e^{tA}: EW $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,$
EV $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1,\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2$ also

$$Y(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ y_1(t) & y_2(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} & e^{3t} \\ -3e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}.$$ Wegen $(Y(0))^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

erhalten wir

$$e^{tA} = Y(t)\left(Y(0)\right)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-2t} + 3e^{3t} & -2e^{-2t} + 2e^{3t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{3t} & 3e^{-2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Lsg. des AWP ist gegeben durch

$$y(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen und komponentenweises integrieren ergibt

$$y(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-2t} + \left(1+\frac{1}{10}\right)e^{3t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{5}e^{-2t} + \left(1+\frac{1}{10}\right)e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 51

a) Da $(t,x) \mapsto t\cos^2 x$ stetig diffbar, existiert nach Picard-Lindelöf zu jedem AW $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eine eindeutige lokale Lösung y des AWP. Setze $g(t) = t$ $(t \in \mathbb{R})$ und $h(x) = \cos^2 x$ $(x \in \mathbb{R})$.
Da $h(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, erfüllt y die Gleichung

$$\int_\xi^{y(t)} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^t s\,ds \qquad \text{Solange } \cos^2(y(t)) \neq 0.$$

Aus $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$ folgt

$$\tan(y(t)) - \tan(\xi) = \frac{1}{2}t^2,$$

also $\tan(y(t)) = \frac{1}{2}t^2 + \tan(\xi)$. Da die Umkehrfunktion des Tangens, arctan, auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, können wir für alle $t \in \mathbb{R}$ nach $y(t)$ auflösen,

$$y(t) = \arctan\left(\frac{1}{2}t^2 + \tan(\xi)\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Damit ist die Lösung global, $t_- = -\infty$ und $t_+ = +\infty$.

b) Da $(t,x) \mapsto \frac{1+x^2}{t(1+t^2)x}$ in einer Umgebung von $(t_0, \xi) = (1,2)$ stetig diff'bar ist, folgt aus Picard-Lindelöf die Existenz einer eindeutigen lokalen Lsg y des AWP. Setze

$$g(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad h(x) = \frac{1+x^2}{x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt $h(\xi) = h(2) \neq 0$, also erfüllt y

$$\int_2^{y(t)} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_1^t \frac{1}{s(1+s^2)}\,ds \qquad \text{Solange } 1+(y(t))^2 \neq 0,$$

also solange y existiert. Es gilt

$$\int_2^{y(t)} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_2^{y(t)} = \frac{1}{2}\ln(1+y(t)^2) - \frac{\ln 5}{2},$$

sowie $\int_1^t \frac{1}{s(1+s^2)} ds \overset{PBZ}{=} \int_1^t \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{1+s^2}\right) ds$

$$= \ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \frac{\ln 2}{2}.$$

Damit $\ln(1+y(t)^2) = 2\ln t - \ln(1+t^2) + \ln(10)$, also

$$y(t) = \sqrt{\frac{10t^2}{1+t^2} - 1}.$$

Das positive Vorzeichen der Wurzel ergibt sich hier aus der Anfangsbedingung $y(1) = 2 > 0$. Es gilt $\frac{10t^2}{1+t^2} - 1 \geq 0$ für $t^2 \geq 1/9$. Daraus folgt

$$t_- = 1/3 \quad \text{und} \quad t_+ = +\infty.$$

Aufgabe 52

Zur Bestimmung der expliziten Lösung von

$$y'(t) = Ay(t), \qquad y(0) = \xi \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix ist, geht man so vor:

(I) Bestimme die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ und dazu deren $\overset{\text{(algebraische)}}{\text{Vielfachheiten}}$ $r_1, \dots, r_m \geq 1$, von A, $m \leq n$, (Ordnung der Nullstellen im charakteristischen Polynom), $\sum_{i=1}^m r_i = n$.

(II) Bestimme zu einem EW $\overset{i=1,\dots,m}{\lambda_i}$ die zugehörigen Eigenvektoren $v_{i,1}, \dots, v_{i,j_i} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, wobei $j_i \in \mathbb{N}$ (geometrische Vielfachheit von λ_i), also $\operatorname{span}\{v_{i,1}, \dots, v_{i,j_i}\} = \ker(A - \lambda_i \mathrm{id})$.

(III) Falls $j_i = r_i$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$, setze für $t \in \mathbb{R}$

$$y_{i,j}(t) := e^{\lambda_i t} v_{i,j}, \qquad j = 1, \dots, r_i,$$

und trage diese r_i Vektoren aus dem $\mathbb{C}^n$ spaltenweise in eine $\overset{(n\times r_i)-}{}$Matrix ein,

$$Y_i(t) := \left(y_{i,1}(t) \cdots y_{i,r_i}(t) \right) = \left(e^{\lambda_i t} v_{i,1} \cdots e^{\lambda_i t} v_{i,r_i} \right) \in \mathbb{C}^{n \times r_i}.$$

(IV) Falls $j_i < r_i$ für ein $i \in \{1,\dots,m\}$, führe zu jedem EV $v_{i,j}$, $j \in \{1,\dots,j_i\}$, die folgende Prozedur durch:

Setze $w_1 := v_{i,j} \in \mathbb{C}^n$ und löse

$$(A-\lambda_i \mathrm{id})w_2 = w_1, \quad (A-\lambda_i \mathrm{id})w_3 = w_2, \dots, (A-\lambda_i \mathrm{id})w_k = w_{k-1},$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $(A-\lambda_i \mathrm{id})w = w_k$ nicht mehr lösbar ist.

Da k von i und j abhängt, schreiben wir $k = k(i,j)$. Setze zu jedem $\ell = 1,\dots,k(i,j)$ für $t \in \mathbb{R}$

$$y_\ell(t) := e^{\lambda_i t}\left(w_\ell + t\, w_{\ell-1} + \dots + \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} w_1\right).$$

Trage diese $k(i,j)$ Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ spaltenweise in eine $(n \times k(i,j))$-Matrix ein,

$$Y_{i,j}(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ y_1(t) & \cdots & y_{k(i,j)}(t) \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times k(i,j)} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Trage diese j_i Matrizen in eine $(n \times r_i)$-Matrix ein,

$$Y_i(t) := \Bigg(\underbrace{Y_{i,1}(t)}_{n \times k(i,1)} \Bigg| \underbrace{Y_{i,2}(t)}_{n \times k(i,2)} \Bigg| \cdots \Bigg| \underbrace{Y_{i,j_i}(t)}_{n \times k(i,j_i)} \Bigg) \in \mathbb{C}^{n \times r_i}.$$

__Beachte__: Laut Satz von der Jordan-Normalform gilt $r_i = k(i,1) + \dots + k(i,j_i)$.

(V) Trage die Matrizen $Y_i(t)$, $i = 1,\dots,m$, in eine $(n \times n)$-Matrix ein,

$$Y(t) := \Bigg(\underbrace{Y_1(t)}_{n \times r_1} \Bigg| \underbrace{Y_2(t)}_{n \times r_2} \Bigg| \cdots \Bigg| \underbrace{Y_m(t)}_{n \times r_m} \Bigg) \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Wähle __reelle Lsgen__ so aus: Ist ein EW $\lambda_i \notin \mathbb{R}$, so __ersetze__ $Y_i(t)$ durch $\operatorname{Re} Y_i(t)$, und das zu $\lambda_j = \overline{\lambda_i}$ gehörende $Y_j(t)$ durch $\operatorname{Im} Y_i(t)$. Sind alle EW reell, muss man nichts auswählen! Dies ergibt eine Matrix

$$\tilde{Y}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Erhalte damit $\boxed{e^{tA} = \tilde{Y}(t)\left(\tilde{Y}(0)\right)^{-1}}$.

[Vorsicht: In der Übung wurde das Auswählen der reellen Lsgen leider nicht korrekt dargestellt !!!]

Die Lsg des AWP ist gegeben durch $e^{tA}\xi$, $t \in \mathbb{R}$. ∎

Als Anwendung bestimmen wir die explizite Lsg des AWP

$$y_1'(t) = -y_2(t) + y_3(t), \qquad y_1(0) = \xi_1$$

$$y_2'(t) = 2y_1(t) - 3y_2(t) + y_3(t), \qquad y_2(0) = \xi_2$$

$$y_3'(t) = y_1(t) - y_2(t) - y_3(t), \qquad y_3(0) = \xi_3.$$

In Vektorschreibweise $y'(t) = Ay(t)$, $y(0) = \xi = (\xi_1, .., \xi_3)$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir halten uns $\boxed{\text{genau}}$ an das Schema !!!

(I) $\det(A - \lambda \mathrm{id}) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2$

$$= -(\lambda+1)^2(\lambda+2)$$

$\Rightarrow$ EW $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ $\quad (\rightsquigarrow m = 2)$

λ_1 alg. einfach, λ_2 alg. doppelt $\Rightarrow r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

(II) • $\ker(A - \lambda_1 \mathrm{id}) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow v_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (\rightsquigarrow j_1 = 1)$

• $\ker(A - \lambda_2 \mathrm{id}) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow v_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad (\rightsquigarrow j_2 = 1)$.

(III) $\underline{i=1}$: $r_1 = j_1 = 1 \rightsquigarrow y_{1,1}(t) = e^{\lambda_1 t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow Y_i(t) = \begin{pmatrix} | \\ y_{1,1}(t) \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

(IV) Prozedur für $\underline{i=2}$: $w_1 := v_{2,1}$, Lsg des GLS

$$(A - \lambda_2 \mathrm{id}) w_2 = w_1,$$

also $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ist $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das GLS $(A-\lambda_2 id)w = w_2$ ist nicht mehr lösbar,

also $h(2,1) = 2$. Dann

$$y_1(t) = e^{\lambda_2 t} w_1 = e^{\lambda_2 t} v_{2,1} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y_2(t) = e^{\lambda_2 t}(w_2 + t w_1) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ te^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Erhalte $$Y_{2,1}(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ y_1(t) & y_2(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2},$$

und damit $$Y_2(t) = Y_{2,1}(t).$$

(V) Nun gilt $$Y(t) = \left(Y_1(t) \mid Y_2(t) \right) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ e^{-2t} & e^{-t} & te^{-t} \\ e^{-2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da alles reell ist, erhalten wir direkt

$$e^{tA} = Y(t)\,Y(0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} e^{-t}(1+t) & -te^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-2t} + (1+t)e^{-t} & e^{-2t} - te^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-2t} + te^{-t} & e^{-2t} - e^{-t} & e^{-t} \end{array}\right),$$

und für $\xi \in \mathbb{R}^3$ ist die Lsg des AWP gegeben durch

$$e^{tA}\xi, \qquad t \in \mathbb{R}.$$