1. Test Analysis II

Aufgabe 1: Es sei $w \in C[0,1]$ mit $w(t) > 0$ für alle $t \in [0,1]$. Wir wissen, dass

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

eine Norm auf $C[0,1]$ definiert.

a) Zeige, dass $\|f\|_w := \|wf\|_\infty$ eine Norm auf $C[0,1]$ definiert.

b) Zeige, dass $\|\cdot\|_w$ äquivalent zu $\|\cdot\|_\infty$ ist.

---

a) (N1): Falls $f=0$, dann $wf=0$, also $\|f\|_w = 0$. 0,5 Sei nun $f \in C[0,1]$.

Falls $\|f\|_w = 0$, dann $wf=0$, d.h. $w(t)f(t)=0$ für alle $t \in [0,1]$. Da $w(t)>0$ für alle t, folgt $f(t)=0$ für alle t, also $f=0$. 0,5

(N2): Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in C[0,1]$. Dann 0,5

$$\|\lambda f\|_w = \|\lambda w f\|_\infty = |\lambda|\, \|wf\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_w .$$

(N3): Seien $f, g \in C[0,1]$. Dann 0,5

$$\|f+g\|_w = \|wf + wg\|_\infty \le \|wf\|_\infty + \|wg\|_\infty = \|f\|_w + \|g\|_w .$$

Also definiert $\|\cdot\|_w$ eine Norm auf $C[0,1]$.

b) Da w stetig, $[0,1]$ kompakt und $w(t)>0$ für alle $t\in[0,1]$, gibt es $m, M > 0$ mit $m \le w(t) \le M$ für alle $t \in [0,1]$. Damit

$$m\|f\|_\infty = m \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \le \sup_{t\in[0,1]} |w(t)f(t)| = \|wf\|_\infty ,$$ 0,5

sowie

$$\|wf\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |w(t)f(t)| \le M \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = M\|f\|_\infty .$$ 0,5

Also sind $\|\cdot\|_w$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent.

Aufgabe 2: Sind folgende Mengen kompakt, vollständig bzw. abgeschlossen? Begründe die Antworten.

a) $M_1 = (-\infty, 1] \cup [2,3]$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$;

b) $M_2 = \{f \in C[0,1] \;:\; \int_0^1 |f(t)|\,dt \le 1\}$ in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

---

a) $(-\infty,1]$ und $[2,3]$ sind abgeschlossen, also ist auch M_1 als endliche Vereinigung abg. Mengen abgeschlossen. 0,5 Da $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig, ist M_1 auch vollständig. 0,5 Da M_1 unbeschränkt, ist M_1 nicht kompakt. 0,5

b) M_2 ist abgeschlossen: Sei dazu $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset M_2$ mit $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} f$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt

$$\int_0^1 |f(t)|\,dt \le \int_0^1 |f(t)-f_j(t)|\,dt + \int_0^1 |f_j(t)|\,dt$$

$$\underset{f_j\in M_2}{\le} \int_0^1 |f(t)-f_j(t)|\,dt + 1 \xrightarrow[j\to\infty]{} 1,$$

0,75

also $\int_0^1 |f(t)|\,dt \le 1$, d.h. $f \in M_2$. Da $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ vollständig, ist M_2 auch vollständig. 0,25

M_2 ist nicht kompakt, da $\overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0,1) \subset M_2$ und es laut Vorlesung eine Folge in $\overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)$ ohne konvergente Teilfolge gibt. 0,5

Aufgabe 3: Bestimme für alle $i \in \{1, ..., n\}$ die partielle Ableitungsfunktion $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ von

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x_1}{1 + |x|_2^4}.$$

Schreibe $|x|_2^4 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^2$. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, nach Quotienten- & Kettenregel,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{1+|x|_2^4}\right) = -\frac{1}{(1+|x|_2^4)^2} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^2$$

$$= -\frac{1}{(1+|x|_2^4)^2}\, 2(x_1^2 + \dots + x_n^2)\, 2x_i$$

$$= -\frac{4 x_i |x|_2^2}{(1+|x|_2^4)^2}.$$

2

Damit, nach Produktregel,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) = \frac{1}{1+|x|_2^4} - \frac{4 x_1^2 |x|_2^2}{(1+|x|_2^4)^2},$$

0,5

und für $i \in \{2, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = -\frac{4 x_1 x_i |x|_2^2}{(1+|x|_2^4)^2}.$$

0,5