Aufgabe 1

Bestimme die Jacobi-Matrix der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x) = \frac{1}{|x|_2}\, x,$$

in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Für $x \neq 0$ schreiben wir $f(x) = \left(\frac{1}{|x|_2} x_1, \frac{1}{|x|_2} x_2, \frac{1}{|x|_2} x_3 \right)$.

Für $i = 1,2,3$ gilt

$$D_i \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) = D_i \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right)^{-1/2} = -\frac{1}{2} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right)^{-3/2} 2 x_i$$

$$= -\frac{x_i}{|x|_2^3},$$

also

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{|x|_2} - \frac{x_1^2}{|x|_2^3} & -\frac{x_1 x_2}{|x|_2^3} & -\frac{x_1 x_3}{|x|_2^3} \\ -\frac{x_2 x_1}{|x|_2^3} & \frac{1}{|x|_2} - \frac{x_2^2}{|x|_2^3} & -\frac{x_2 x_3}{|x|_2^3} \\ -\frac{x_3 x_1}{|x|_2^3} & -\frac{x_3 x_2}{|x|_2^3} & \frac{1}{|x|_2} - \frac{x_3^2}{|x|_2^3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1, x_2) = e^{x_1^2+x_2^2},$$

auf lokale und globale Extrema.

Es gilt $\operatorname{grad} f(x_1,x_2) = \left(2x_1 e^{x_1^2+x_2^2}, 2x_2 e^{x_1^2+x_2^2}\right)$ für alle $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

Da die exp-Funktion nirgendwo verschwindet, verschwindet grad f also genau bei $x=(0,0)$. Für die Hesse-Matrix gilt

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2e^{x_1^2+x_2^2} + 4x_1^2 e^{x_1^2+x_2^2} & 4x_1x_2 e^{x_1^2+x_2^2} \\ 4x_1x_2 e^{x_1^2+x_2^2} & 2e^{x_1^2+x_2^2} + 4x_2^2 e^{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix},$$

also $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, d.h. $H_f(0,0)$ ist positiv definit.

Damit besitzt f genau ein lokales Minimum in $x=(0,0)$, und kein lokales Maximum. Da $e^{x_1^2+x_2^2} \geq 1 = e^0$ für alle (x_1,x_2), ist das Minimum auch global. Da $f(x_1,x_2) \to \infty$ für $|x|_2 \to \infty$, besitzt f kein globales Maximum.

Aufgabe 3

Bestimme den Wert der folgenden komplexen Kurvenintegrale.

$$\text{a)} \int_{|z|=1} z^2 e^{\sin z}\, \mathrm{d}z\,; \qquad \text{b)} \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z+\mathrm{i}}\, \mathrm{d}z\,; \qquad \text{c)} \int_{|z|=2} \frac{e^{4z}}{(z-\mathrm{i})^3}\, \mathrm{d}z\,.$$

a) $z \mapsto z^2 e^{\sin z}$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, also

$$\int_{|z|=1} z^2 e^{\sin z} dz = 0$$ nach Integralsatz von Cauchy.

b) Cauchy-Integralformel mit $f(z) = e^z$ liefert

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z+i} dz = 2\pi i\, e^{-i}.$$

c) Integralformel für Ableitungen mit $f(z) = e^{4z}$ liefert

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{4z}}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(z)\Big|_{z=i} = 16\pi i\, e^{4i}.$$