

Analysis III

1. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 29.10.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß jede σ -Algebra entweder endlich oder überabzählbar unendlich ist.

Aufgabe 2 (K)

- a) Seien X, Y nichtleere Mengen, $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ sei eine σ -Algebra auf Y und $f : X \rightarrow Y$ sei eine Abbildung. Zeigen Sie, daß

$$f^{-1}(\mathfrak{B}) := \{A \subseteq X \mid A = f^{-1}(B) \text{ für ein } B \in \mathfrak{B}\}$$

eine σ -Algebra auf X ist.

- b) Es sei X eine nichtleere Menge. Das Teilmengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ habe die Eigenschaften (1) und (2) aus der Definition einer σ -Algebra auf X (siehe Vorlesung), sowie die Eigenschaft
- (3') Für jede disjunkte Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ gilt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$.
- Zeigen Sie, daß \mathfrak{A} genau dann eine σ -Algebra auf X ist, wenn gilt:
- (S) Für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt $A \cap B \in \mathfrak{A}$.

Aufgabe 3

Es sei X eine Menge, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{A} := \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E} \mid \mathcal{F} \text{ höchstens abzählbar}\}$. Zeigen Sie:

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{A}} \sigma(\mathcal{F}).$$

Aufgabe 4 (K)

- (1) Es sei X eine nichtleere Menge und $(X_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ eine Folge disjunkter Teilmengen von X mit $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j = X$. Bestimmen Sie $\sigma(\{X_j \mid j \in \mathbb{N}\})$.
- (2) Es seien $\mathcal{E}_1 = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}$ und $\mathcal{E}_2 = \{A \subset \mathbb{R}^d \mid A \text{ kompakt}\}$. Zeigen Sie, daß für die Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R}^d gilt:

$$\mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2).$$

Aufgabe 5

Es sei X eine Menge, \mathfrak{A} eine σ -Algebra über X und $Y \subseteq X$. Zeigen Sie:

$$\sigma(\mathfrak{A} \cup \{Y\}) = \{(A \cap Y) \cup (B \cap Y^c) \mid A, B \in \mathfrak{A}\}.$$

Übungsblatt

Jeden Freitag erscheint ein Übungsblatt zur schriftlichen Bearbeitung und kann im Allianzgebäude (3. Stock, gegenüber vom Fahrstuhl) abgeholt oder von

<http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/ana32010w/>

bzw. im ILIAS (siehe unten) heruntergeladen werden. Die beiden **K**-Aufgaben können zur Korrektur abgegeben werden. Die bearbeiteten Aufgaben werden in die Abgabekästen im 3. Stock des Allianzgebäudes (vom Fahrstuhl geradeaus auf der linken Seite, neben Raum 3A-03) geworfen. Der späteste Abgabetermin ist dem jeweiligen Übungsblatt zu entnehmen. In der Regel ist dies um 11:30 Uhr am Freitag der folgenden Woche. Die Rückgabe der korrigierten Übungsblätter erfolgt in den Übungsgruppen.

Übungsschein

Auf jedem Übungsblatt finden sich zwei **K**-Aufgaben, die mit jeweils maximal 4 Punkten bewertet werden. Den Übungsschein erhält, wer in den Übungsblättern 1–7 sowie 8–14 jeweils mindestens 28 Punkte erreicht.

Damit der Übungsschein korrekt verbucht werden kann, müssen sich Bachelor-Studierende im Laufe des Semesters online für den Schein anmelden (unabhängig von der Anmeldung zum Tutorium). Nähere Informationen finden Sie im ILIAS (siehe unten).

Tutorien

Die Anmeldung zu den Tutorien erfolgt durch das System „WebInScribe“. Einzelheiten entnehmen Sie bitte dem entsprechenden Merkblatt auf <https://webinscribe.ira.uka.de/>. Die Tutorien finden ab dem 25.10.2010 statt.

Literatur

D.L. Cohn, *Measure Theory*. Birkhäuser (1980).

J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*. Springer (2007).

W. Rudin, *Real and Complex Analysis*. 3rd ed., McGraw Hill (1986).

(Auch erhältlich als deutsches Taschenbuch: W. Rudin, *Reelle und Komplexe Analysis*. Oldenbourg (1999))

D. Werner, *Einführung in die höhere Analysis*. Springer (2006). Kapitel IV.

Lernplattform ILIAS

Weitere Informationen, ergänzendes Material zur Vorlesung und Übung sowie ein Diskussionsforum finden Sie auf der Lernplattform ILIAS, zu der Sie über den folgenden Link gelangen:

<https://ilias.rz.uni-karlsruhe.de/>

Es wird dringend empfohlen, sich im ILIAS anzumelden, da dort sämtliche relevanten Informationen, z.B. zur Online-Anmeldung, zur Verfügung gestellt werden. Außerdem können über das ILIAS-System auch kurzfristige Terminänderungen per Rundmail bekannt gegeben werden. Um sich auf der Lernplattform anmelden zu können, benötigen Sie einen RZ-Account. Nähere Informationen zur Anmeldung auf ILIAS finden Sie unter

<http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/ana32010w/>