KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2010/11
29.10.2010

Analysis III

2. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 05.11.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 6 (K)

a) Es seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B \in \mathfrak{A}$. Zeigen Sie

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

b) Es seien X eine nichtleere Menge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit $\mu(\emptyset) = 0$ sowie den folgenden Eigenschaften:

(M2') Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{\leq n}} \in \mathfrak{A}^n$ disjunkt gilt $\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$,

($*$) für alle $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ mit $A_{j+1} \subseteq A_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \emptyset$ gilt $\lim_{j \to \infty} \mu(A_j) = 0$.

Zeigen Sie, daß μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$ ist.

Aufgabe 7

Es seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_j \in \mathfrak{A}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Definiere die Mengen

$$\liminf_{j \to \infty} A_j := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \qquad \limsup_{j \to \infty} A_j := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j.$$

Zeigen Sie:

a) $\liminf\limits_{j \to \infty} A_j$ und $\limsup\limits_{j \to \infty} A_j$ sind Elemente von $\mathfrak{A}$

b) $\mu(\liminf\limits_{j \to \infty} A_j) \leqslant \liminf\limits_{j \to \infty} \mu(A_j)$

c) Falls $\mu\Big(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\Big) < \infty$ für ein $m \in \mathbb{N}$, dann $\mu(\limsup\limits_{j \to \infty} A_j) \geqslant \limsup\limits_{j \to \infty} \mu(A_j)$

d) Kann man in c) auf die Zusatzbedingung $\mu\Big(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\Big) < \infty$ verzichten?

Aufgabe 8

Es sei μ ein beliebiges Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß es genau eine Folge $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in [0,\infty]^{\mathbb{N}}$ mit $\mu = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \delta_j$ gibt (wobei die Konvergenz der Reihe punktweise zu verstehen ist).

Aufgabe 9 (K)

a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $I_k = [a_k, b_k]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $a_k \leq b_k$, und es gelte $I_{k+1} \subseteq I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie $(b_k - a_k) \to 0$ für $k \to \infty$. Zeigen Sie, daß es genau ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k$.

b) Setze $X := [0,1]$ und $\mathfrak{A} := \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, daß es kein Maß $\mu : \mathfrak{A} \to \{0,1\}$ gibt mit $\mu(X) = 1$ und $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$.

Hinweis zu b) Betrachten Sie eine geeignete Intervallschachtelung in $[0,1]$ und verwenden Sie Teil a).