KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
INSTITUT FÜR ANALYSIS 05.11.2010
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

Analysis III

3. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 12.11.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 10 (K)

a) Wir definieren die Menge

$$\mathcal{N}_d := \{M \subseteq \mathbb{R}^d \,|\, \exists\, N \in \mathfrak{B}_d : \lambda_d(N) = 0,\ M \subseteq N\}.$$

der *Lebesgue-Nullmengen auf* $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, daß

$$\mathfrak{L}_d := \{B \cup N \ : \ B \in \mathfrak{B}_d, N \in \mathcal{N}_d\}$$

eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ ist. Man nennt $\mathfrak{L}_d$ *Lebesguesche σ-Algebra*.

b) Man zeige, daß die Erweiterung von λ_d auf $\mathfrak{L}_d$,

$$\mu : \mathfrak{L}_d \to [0, \infty], \qquad \mu(B) := \lambda_d(A) \quad \text{falls } B = A \cup M \in \mathfrak{L}_d \text{ mit } A \in \mathfrak{B}_d, M \in \mathcal{N}_d,$$

eine wohldefinierte Abbildung ist und ein Maß auf $\mathcal{L}_d$ definiert. Wir schreiben daher auch $\lambda_d(M) := \mu(M)$ für alle $M \in \mathfrak{L}_d$.

Aufgabe 11

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent:

(1) $M \in \mathfrak{L}_d$.

(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $A \subseteq M \subseteq U$ und $\lambda_d(U \backslash A) < \varepsilon$.

Aufgabe 12 (K)

a) Es seien $B \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ mit $B \in \mathfrak{B}_{d-1}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie:

$$\lambda_d(B \times (a, b]) = (b - a)\lambda_{d-1}(B).$$

Hinweis: Zeigen Sie, daß $\mu : \mathfrak{B}_{d-1} \to [0, \infty], B \mapsto \frac{1}{b-a}\lambda_d(B \times (a, b])$ *ein Maß ist.*

b) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen oder abgeschlossen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, daß der Graph

$$G_f := \{(x, f(x)) \,|\, x \in U\}$$

von f, aufgefaßt als Teilmenge von $\mathbb{R}^d$, in $\mathfrak{B}_d$ liegt und eine Lebesgue-Nullmenge ist.

c) Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $M \in \mathcal{N}_1$ (vgl. Aufgabe 10). Zeigen Sie $f(M) \in \mathcal{N}_1$.

Aufgabe 13

Es seien X eine Menge und $A, B, A_j \subseteq X$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften charakteristischer Funktionen auf X.

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B, \qquad \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cup B} + \mathbb{1}_{A\cap B}, \qquad \mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_X - \mathbb{1}_A,$$

$$\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B \cdot (\mathbb{1}_X - \mathbb{1}_A), \qquad \mathbb{1}_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_j}, \qquad \mathbb{1}_{\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \inf_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_j},$$

$$|\,\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\,| = \mathbb{1}_{A\Delta B}, \qquad\qquad A \subseteq B \iff \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B,$$

wobei $A\Delta B := (A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.