KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2010/11
12.11.2010

Analysis III

4. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 19.11.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 14 (K)

(1) Die Funktionen $u, v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^{d+m} \to \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^k$ und $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ seien jeweils Borel-meßbar. Zeigen Sie, daß auch die folgenden Funktionen Borel-meßbar sind:

a) $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, x \mapsto f(x, u(x))$,

b) $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k x \mapsto g(x, u(x) \cdot v(x))$,

c) $\operatorname{sign} \circ h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, wobei $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\operatorname{sign}(y) := y/|y|$ für alle $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $\operatorname{sign}(0) := 0$ definiert ist.

(2) Zeigen Sie, daß monotone Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stets Borel-meßbar sind.

Aufgabe 15

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $U_f := \{x \in \mathbb{R} \,|\, f \text{ unstetig in } x\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Zeigen Sie:

(1) Die Menge U_f ist eine Borel-Menge.

(2) Ist U_f abzählbar, so ist f Borel-meßbar.

(3) Ist $U_f \in \mathfrak{N}_1$, so ist f $\mathfrak{L}_1$-$\mathfrak{B}_1$-meßbar (vgl. Aufgabe 10).

Aufgabe 16 (K)

a) Definiere

$$f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \begin{cases} 1/\cos x, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}, \\ +\infty, & \text{falls } x \in \{\pi/2 + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}, \\ \pm\infty, & \text{falls } x = \pm\infty. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen von f. Ist f $\overline{\mathfrak{B}}_1$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-meßbar?

b) Definiere

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 1/q & \text{falls } 0 \neq x = p/q \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Ist f Borel-meßbar?

c) Zeigen Sie die Meßbarkeit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

— bitte wenden —

Aufgabe 17

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei $t \mapsto f(t,x)$ stetig und für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei $x \mapsto f(t,x)$ Borel-meßbar. Zeigen Sie, daß f Borel-meßbar ist. Bleibt die Folgerung richtig, wenn man nur voraussetzt, daß $t \mapsto f(t,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $x \mapsto f(t,x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ Borel-meßbar ist?