KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2010/11
19.11.2010

Analysis III

5. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 26.11.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 18 (K)

Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen $f : X \to [0, +\infty]$ meßbar sind, und berechnen Sie jeweils das Integral $\int_X f(x)\,dx$.

a) $X = [0, 1]$, $f(x) := [e^x]$ für alle $x \in X$, ($[y]$ ganzzahliger Anteil von y, vgl. Analysis 1),

b) $X = (0, 1]$, $f(x) := \frac{\sin x}{x^3}$ für alle $x \in X$,

c) $X = \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$

d) $X = \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

Aufgabe 19

Es sei $X \in \mathfrak{B}_d$ und $f : X \to [0, +\infty]$ meßbar. Beweisen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung:

$$\forall\, \alpha > 0 \,:\, \lambda_d(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f(x)\,dx.$$

Aufgabe 20 (K)

a) Es seien $X \in \mathfrak{B}_d$ und $A_j \in \mathfrak{B}(X)$, $j \in \mathbb{N}$, mit $A_j \subseteq A_{j+1}$ und $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Die Funktion $f : X \to [0, \infty]$ sei meßbar. Zeigen Sie, daß

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_X \mathbb{1}_{A_j}(x) \cdot f(x)\,dx.$$

b) Es seien $X \in \mathfrak{B}_d$ und $f : X \to [0, +\infty]$ meßbar. Zeigen Sie, daß durch $\mu(A) := \int_X \mathbb{1}_A(x) \cdot f(x)\,dx$ für alle $A \in \mathfrak{B}(X)$ ein Maß μ auf $\mathfrak{B}(X)$ definiert wird.

c) Es seien $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ und $y \in \mathbb{R}^d$. Definiere $\tau_y f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $(\tau_y f)(x) := f(x - y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie:

(i) $\tau_y f$ ist genau dann meßbar, wenn f meßbar ist,

(ii) $\tau_y f$ ist genau dann integrierbar, wenn f integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_y f)(x)\,dx.$$

(Hinweis zu (ii): Betrachten Sie zunächst einfache Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$.)

Aufgabe 21

Es sei $X \in \mathfrak{B}_d$, und seien $f, f_n : X \to [0, +\infty]$ meßbare Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n \leq f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Ist $\int_X f(x)\,dx < +\infty$, so gilt $\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx$.

   (*Hinweis: betrachten Sie die Funktionen* $g_n := f - \sup_{k\geq n} f_k$.)

b) In der Ungleichung in a) steht im allgemeinen „$>$“.

c) Die Konklusion in a) wird falsch, wenn man auf die Bedingung $\int_X f(x)\,dx < +\infty$ verzichtet.