KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2010/11
26.11.2010

Analysis III

6. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 03.12.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 22 (K)

a) Ist die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{3/2} e^{\cos(1/x)} \tan(x)$ integrierbar?

b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)}\, dx\,, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}\, dx.$$

c) Definiere $a_n := \int_{[0,1]} \frac{x}{(1+x)^n}\, dx$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Wert.

d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und integrierbar. Gilt dann $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$?

Aufgabe 23

Es sei $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$.

a) Sei $a > 1$ und $f : X \to \mathbb{R}$ meßbar. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a^n \lambda(\{a^n \leq |f| < a^{n+1}\}) < \infty.$$

(Hierbei ist $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n := \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n$ für $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in [0,+\infty]^{\mathbb{Z}}$).

b) Es gelte $\lambda(X) < \infty$, und es sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{|f| > n\}) < \infty.$$

Aufgabe 24 (K)

Prüfen Sie die folgenden Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ auf Lebesgue- und uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit, und berechnen Sie ggf. das Lebesgue-Integral $\int_X f(x)\, dx$.

a) $X := [1,\infty)$ und $f(x) := x^{\alpha}$ für alle $x \in X$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$,

b) $X := (e,\infty)$ und $f(x) := \dfrac{1}{x \cdot \log(x)}$ für alle $x \in X$,

c) $X := (0,1]$ und $f(x) := x^{-1/3} \cdot \mathbb{1}_{(0,1]\setminus\mathbb{Q}} + x^{-4/3} \cdot \mathbb{1}_{(0,1]\cap\mathbb{Q}}$ für alle $x \in X$,

d) $X := [1,+\infty)$ und $f(x) := \sqrt{x} \cdot \cos(x^2)$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 25

Es sei $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$, und $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien meßbare und integrierbare Funktionen: Zeigen Sie, daß genau dann $f = g$ f.ü. gilt, falls

$$\forall\, A \in \mathfrak{B}(X) \;:\; \int_A f(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx.$$