KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2010/11
03.12.2010

Analysis III

7. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 10.12.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 26 (K)

a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{n^2 x}{2n^2x^4 + \sin(x)}\, dx, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{e^{nx} + n(x+1)^2}\, dx.$$

b) Es sei $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{-n}^{n} x g(x)\, dx$.

c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ sei integrierbar. Gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+1} f\, dx = 0$?

Aufgabe 27

Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, daß $f(x+n), f(x-n) \to 0$ für $n \to \infty$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 28

Es sei $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$ und $f : X \to [0, +\infty]$ integrierbar. Zeigen Sie:

$$n \int_X \log\left(1 + \frac{1}{n} f\right) dx \to \int_X f\, dx \quad \text{für } n \to \infty.$$

Aufgabe 29

Es sei $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $(0,1) \cap \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : (0,1) \to [0, \infty], x \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{\sqrt{|x - q_j|}},$$

auf $(0,1)$ integrierbar ist.
Schließen Sie daraus, daß die Reihe $f(x)$ für fast alle $x \in (0,1)$ konvergiert.

Aufgabe 30 (K)

Es sei $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$ und $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Zeigen Sie:

a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Menge $M \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\lambda^d(M) < +\infty$ und $\int_{X\setminus M} |f|\, dx < \varepsilon$.

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, daß für alle $A \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\lambda^d(A) < \delta$ gilt $\int_A |f|\, dx < \varepsilon$.