

Analysis III

8. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 17.12.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 31 (K)

Die Funktion $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ habe die Eigenschaften

$$\varphi \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi \, dx = 1, \quad \exists R > 0 : \varphi(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R].$$

Definiere zu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ die *Faltung* von f mit φ , bezeichnet mit $\varphi * f$, durch

$$\varphi * f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)f(y) \, dy.$$

- Zeigen Sie, daß $\varphi * f$ wohldefiniert und auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung.
- Die Funktion f sei nun zusätzlich stetig und beschränkt. Definiere $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) \rightarrow f(x) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Freiwilliger Zusatz: Finden Sie eine Funktion φ mit den drei genannten Eigenschaften.

Aufgabe 32

Es sei $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$ und die Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ sei meßbar. Zeigen Sie, daß die Menge

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

in \mathfrak{B}_{d+1} liegt (wobei wir $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ mit \mathbb{R}^{d+1} identifizieren) und daß

$$\int_X f \, dx = \lambda_{d+1}(V).$$

Interpretieren Sie dieses Resultat.

Aufgabe 33

Bestimmen Sie das Lebesgue-Maß der folgenden meßbaren Teilmengen $K \subseteq \mathbb{R}^3$.

- $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in [0, 1], r \leq z \leq Re^{x+y}\}$ mit $0 < r < R$.
- K sei diejenige Teilmenge von \mathbb{R}^3 , die von oben durch den Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und von unten durch das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ (in der (x, y) -Ebene) begrenzt wird.

Aufgabe 34 (K)

- a) Berechnen Sie das Lebesgue-Maß des Durchschnitts A der beiden Kreiszyylinder im \mathbb{R}^3 , die durch die Ungleichungen $x^2 + z^2 \leq r^2$ und $y^2 + z^2 \leq r^2$ beschrieben werden.
- b) Im \mathbb{R}^3 sei die Menge A durch die Fläche $z = x^2 - y^2 \geq 0$, die x, y -Ebene und durch die Ebenen $x = 0$ und $x = 3$ begrenzt. Berechnen Sie das Lebesgue-Maß von A .
- c) Berechnen Sie das Lebesgue-Maß von

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 3, y^2 \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{3 - x^2} \sqrt{3 - y^2} \right\}.$$

Prüfungsankündigung *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung* Analysis 1/2 und Analysis 3

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 23. März 2011, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2),

und die Abschlußklausur zur Analysis 3 (Bachelor-Modulprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Donnerstag, den 24. März 2011, 14-16 Uhr.

- Studierende der PHYSIK, MATHEMATIK UND INFORMATIK, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- DIPLOMSTUDIERENDE der PHYSIK UND INFORMATIK sowie STUDIERENDE AUF LEHRAMT melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).
- DIPLOMMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4B-01 (Allianzgebäude) bei Dr. Kühnlein,
- DIPLOM-WIRTSCHAFTSMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 3C-08 (Allianzgebäude) bei Dr. Neher,
- DIPLOM-TECHNOMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4C-21 (Allianzgebäude) bei Dr. Hettlich.

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

Anmeldeschluß für die Abschlußklausuren (Analysis 1/2, Analysis 3): 23. Februar 2011.

Alle Informationen zur BACHELOR-MODULPRÜFUNG/ZWISCHENPRÜFUNG/DIPLOMVORPRÜFUNG ANALYSIS 1/2 UND ANALYSIS 3 finden Sie auch unter

<http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de>

Link zum QISPOS: <https://studium.kit.edu/>

Übungsschein Analysis 3

Für den *Übungsschein* zur Analysis 3 ist keine Anmeldung erforderlich. Im Falle des Erlangens wird der Übungsschein im Anschluß an die Vorlesungszeit in Papierform ausgestellt.

Eulenfest 2010

Am **16.12.2010** ab **19:00 Uhr** findet im **Infobau am HSaF** das alljährliche **Eulenfest** aka Glühweinfest statt. Euch erwarten Musik, Glühwein, Cocktails und **tolle Menschen**. Und das Beste: **Freier Eintritt!**

