

## Analysis III

### 8. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 17.12.2010, 11.30 Uhr.

#### Aufgabe 31 (K)

Die Funktion  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$  habe die Eigenschaften

$$\varphi \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi \, dx = 1, \quad \exists R > 0 : \varphi(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R].$$

Definiere zu  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  die *Faltung* von  $f$  mit  $\varphi$ , bezeichnet mit  $\varphi * f$ , durch

$$\varphi * f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)f(y) \, dy.$$

- Zeigen Sie, daß  $\varphi * f$  wohldefiniert und auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung.
- Die Funktion  $f$  sei nun zusätzlich stetig und beschränkt. Definiere  $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Zeigen Sie, daß für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) \rightarrow f(x) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

*Freiwilliger Zusatz:* Finden Sie eine Funktion  $\varphi$  mit den drei genannten Eigenschaften.

#### Aufgabe 32

Es sei  $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$  und die Funktion  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  sei meßbar. Zeigen Sie, daß die Menge

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

in  $\mathfrak{B}_{d+1}$  liegt (wobei wir  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  mit  $\mathbb{R}^{d+1}$  identifizieren) und daß

$$\int_X f \, dx = \lambda_{d+1}(V).$$

Interpretieren Sie dieses Resultat.

#### Aufgabe 33

Bestimmen Sie das Lebesgue-Maß der folgenden meßbaren Teilmengen  $K \subseteq \mathbb{R}^3$ .

- $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in [0, 1], r \leq z \leq Re^{x+y}\}$  mit  $0 < r < R$ .
- $K$  sei diejenige Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$ , die von oben durch den Paraboloid  $z = x^2 + y^2$  und von unten durch das Quadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$  (in der  $(x, y)$ -Ebene) begrenzt wird.

## Aufgabe 34 (K)

- a) Berechnen Sie das Lebesgue-Maß des Durchschnitts  $A$  der beiden Kreiszyylinder im  $\mathbb{R}^3$ , die durch die Ungleichungen  $x^2 + z^2 \leq r^2$  und  $y^2 + z^2 \leq r^2$  beschrieben werden.
- b) Im  $\mathbb{R}^3$  sei die Menge  $A$  durch die Fläche  $z = x^2 - y^2 \geq 0$ , die  $x, y$ -Ebene und durch die Ebenen  $x = 0$  und  $x = 3$  begrenzt. Berechnen Sie das Lebesgue-Maß von  $A$ .
- c) Berechnen Sie das Lebesgue-Maß von

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 3, y^2 \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{3-x^2}\sqrt{3-y^2} \right\}.$$

---

## Prüfungsankündigung *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung* Analysis 1/2 und Analysis 3

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

**Mittwoch, den 23. März 2011, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2),**

und die Abschlußklausur zur Analysis 3 (Bachelor-Modulprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

**Donnerstag, den 24. März 2011, 14-16 Uhr.**

- Studierende der PHYSIK, MATHEMATIK UND INFORMATIK, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- DIPLOMSTUDIERENDE der PHYSIK UND INFORMATIK sowie STUDIERENDE AUF LEHRAMT melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).
- DIPLOMMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4B-01 (Allianzgebäude) bei Dr. Kühnlein,
- DIPLOM-WIRTSCHAFTSMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 3C-08 (Allianzgebäude) bei Dr. Neher,
- DIPLOM-TECHNOMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4C-21 (Allianzgebäude) bei Dr. Hettlich.

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

**Anmeldeschluß für die Abschlußklausuren (Analysis 1/2, Analysis 3): 23. Februar 2011.**

Alle Informationen zur BACHELOR-MODULPRÜFUNG/ZWISCHENPRÜFUNG/DIPLOMVORPRÜFUNG ANALYSIS 1/2 UND ANALYSIS 3 finden Sie auch unter

<http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de>

Link zum QISPOS: <https://studium.kit.edu/>

## Übungsschein Analysis 3

Für den *Übungsschein* zur Analysis 3 ist keine Anmeldung erforderlich. Im Falle des Erlangens wird der Übungsschein im Anschluß an die Vorlesungszeit in Papierform ausgestellt.

# Eulenfest 2010

Am **16.12.2010** ab **19:00 Uhr** findet im **Infobau am HSaF** das alljährliche **Eulenfest** aka Glühweinfest statt. Euch erwarten Musik, Glühwein, Cocktails und **tolle Menschen**. Und das Beste: **Freier Eintritt!**

