

Analysis III

9. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 07.01.2011, 11.30 Uhr.

Aufgabe 35

- a) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die Fläche des Dreiecks mit den Endpunkten $(0, 0)$, $(0, \pi)$, und $(\pi, 0)$. Berechnen Sie

$$\int_A (xy^2 - 2 \sin(x+y)) d(x, y).$$

- b) Es sei $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x^3 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_B (x^2 + 2y) d(x, y).$$

Aufgabe 36 (K)

- a) Es seien $a \in \mathbb{R}$, $D_a := \{(x, y) \in (0, 1)^2 \mid y \leq x^a\}$ und $f(x, y) := \frac{1}{x^2+y^2}$ für alle $(x, y) \in D_a$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $f : D_a \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar?

- b) Definiere $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x\}$ und

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{(1+x^2)y^2} \sin(e^{-x/y})e^{-x/y}.$$

Zeigen Sie, daß f integrierbar ist, und berechnen Sie $\int_D f(x, y) d(x, y)$.

- c) Definiere $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x-y}{(x+y)^3}$. Berechnen Sie die iterierten Integrale

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy, \quad \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dy \right) dx.$$

Ist f integrierbar?

Aufgabe 37

Es seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, daß es eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ so gibt, daß für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$ die Faltung

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy$$

wohldefiniert ist. Wir setzen weiter $(f * g)(x) := 0$ für alle $x \in N$ und erhalten so eine Funktion $f * g$ (die nur fast überall eindeutig bestimmt ist).

- a) Zeigen Sie, daß $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ist mit $\int_{\mathbb{R}^d} |(f * g)(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| dx$.

- b) Es gilt $f * g = g * f$ fast überall (verwenden Sie hierzu, ggf. ohne Beweis, daß für alle $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ gilt $\int_{\mathbb{R}^d} h(-x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx$).

Aufgabe 38 (K)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g \in \mathcal{L}^1([a, b])$. Definiere

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{und} \quad G(x) := \int_a^x g(t) dt \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Zeigen Sie: $F \cdot g$ und $f \cdot G$ sind integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(b)G(b) - \int_a^b f(x)G(x) dx.$$

Aufgabe 39

Es seien $a, b > 0$. Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Fubini auf die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{-xy}$ für eine geeignete Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ an.

Prüfungsankündigung Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung Analysis 1/2 und Analysis 3

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 23. März 2011, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2),

und die Abschlußklausur zur Analysis 3 (Bachelor-Modulprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Donnerstag, den 24. März 2011, 14-16 Uhr.

- Studierende der PHYSIK, MATHEMATIK UND INFORMATIK, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- DIPLOMSTUDIERENDE der PHYSIK UND INFORMATIK sowie STUDIERENDE AUF LEHRAMT melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).
- DIPLOMMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4B-01 (Allianzgebäude) bei Dr. Kühnlein,
- DIPLOM-WIRTSCHAFTSMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 3C-08 (Allianzgebäude) bei Dr. Neher,
- DIPLOM-TECHNOMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4C-21 (Allianzgebäude) bei Dr. Hettlich.

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

Anmeldeschluß für die Abschlußklausuren (Analysis 1/2, Analysis 3): 23. Februar 2011.

Alle Informationen zur BACHELOR-MODULPRÜFUNG/ZWISCHENPRÜFUNG/DIPLOMVORPRÜFUNG ANALYSIS 1/2 UND ANALYSIS 3 finden Sie auch unter

<http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de>

Link zum QISPOS: <https://studium.kit.edu/>

Übungsschein Analysis 3

Für den *Übungsschein* zur Analysis 3 ist keine Anmeldung erforderlich. Im Falle des Erlangens wird der Übungsschein im Anschluß an die Vorlesungszeit in Papierform ausgestellt.