

Analysis III

10. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 14.01.2011, 11.30 Uhr.

Aufgabe 40

a) Definiere $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (s, t) \mapsto (s(1-t), st)$. Zeigen Sie: $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $\Phi([0, 1]^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, Φ ist auf $(0, 1)^2$ injektiv und $\det \Phi'(s, t) \neq 0$ für alle $(s, t) \in (0, 1)^2$.

b) Betrachte zu $a, b > 0$ die Beta-Funktion B und die Gamma-Funktion Γ ,

$$B(a, b) := \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt, \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Zeigen Sie, daß für alle $a, b > 0$ gilt: $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

c) Setze $\kappa_d := \lambda_d(U_1(0))$, wobei $U_1(0)$ die offene Einheitskugel in \mathbb{R}^d ist. Folgern Sie mithilfe von b) die Rekursionsformel $\kappa_d = \kappa_{d-1} \cdot \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}$, und hieraus die bereits in der Übung genannte Formel für das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel

$$\kappa_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}.$$

d) Zeigen Sie, daß

$$\int_{\Phi([0, 1]^2)} x^{a-1} y^{b-1} f(x+y) d(x, y) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \int_0^1 s^{a+b-1} f(s) ds$$

für beliebige $a, b > 0$ und für alle meßbaren $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, für die mindestens eines der beiden Integrale existiert.

Aufgabe 41

a) Bestimmen Sie für $h > 0$ und $0 < r < R$ das Volumen des Hohlzylinders

$$Z_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

und des Halbzylinders

$$Z_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0, 0 \leq z \leq h, 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

b) Berechnen Sie $\int_{Z_1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d(x, y, z)$.

Aufgabe 42 (K)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertierbar und $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch und positiv definit. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\|Ax\|^2) dx, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-x \cdot Bx) dx.$$

Berechnen Sie ferner das Volumen des Ellipsoids $E := \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot Bx \leq 1\}$.

Aufgabe 43

Berechnen Sie für $a > 0$ das Volumen des so genannten *Vivianischen Körpers*

$$V_a := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \text{ und } x^2 + y^2 \leq ax \}.$$

Aufgabe 44 (K)

a) Berechnen Sie für die Menge $A := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leq (1-z)^2 \}$ das Integral

$$\int_A (x^2 + y^2)^2 e^{2(1-z)^7} d(x, y, z).$$

b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_B 8z(x^2 + y^2) d(x, y, z), \quad \text{wobei } B := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0 \}.$$

Prüfungsankündigung *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung* Analysis 1/2 und Analysis 3

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 23. März 2011, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2),

und die Abschlußklausur zur Analysis 3 (Bachelor-Modulprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Donnerstag, den 24. März 2011, 14-16 Uhr.

- Studierende der PHYSIK, MATHEMATIK UND INFORMATIK, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- DIPLOMSTUDIERENDE der PHYSIK UND INFORMATIK sowie STUDIERENDE AUF LEHRAMT melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).
- DIPLOMMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4B-01 (Allianzgebäude) bei Dr. Kühnlein,
- DIPLOM-WIRTSCHAFTSMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 3C-08 (Allianzgebäude) bei Dr. Neher,
- DIPLOM-TECHNOMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4C-21 (Allianzgebäude) bei Dr. Hettlich.

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

Anmeldeschluß für die Abschlußklausuren (Analysis 1/2, Analysis 3): 23. Februar 2011.

Alle Informationen zur BACHELOR-MODULPRÜFUNG/ZWISCHENPRÜFUNG/DIPLOMVORPRÜFUNG ANALYSIS 1/2 UND ANALYSIS 3 finden Sie auch unter

<http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de>

Link zum QISPOS: <https://studium.kit.edu/>

Übungsschein Analysis 3

Für den *Übungsschein* zur Analysis 3 ist keine Anmeldung erforderlich. Im Falle des Erlangens wird der Übungsschein im Anschluß an die Vorlesungszeit in Papierform ausgestellt.