KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
INSTITUT FÜR ANALYSIS 14.01.2011
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

Analysis III

11. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 21.01.2011, 11.30 Uhr.

Aufgabe 45 (K)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\lambda_2(F)$ der Fläche F, die von der Zykloide

$$\{(t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2\pi]\}$$

und dem Intervall $[0, 2\pi]$ begrenzt wird.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma y^2\,dx + (2xy + x)dy$, wobei γ die Menge $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x - x^3 \geq y \geq 0\}$ positiv umlaufe.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \begin{pmatrix} \sin(x^3) - x^2y^3 \\ \frac{3}{5}x^5 + \log(1 + y^2) \end{pmatrix} \cdot d(x, y)$ mit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Aufgabe 46

Für $R > 1$ sei die Oberfläche $\Phi([0, 2\pi]^2)$ eines Torus mit der Parameterdarstellung

$$\Phi : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto ((R + \cos v) \cos u, (R + \cos v) \sin u, \sin v)$$

gegeben. Berechnen Sie den Flächeninhalt $I(\Phi)$ von Φ.

Aufgabe 47

a) Gegeben sei das Flächenstück $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 3(x^2 + y^2), 3 \leq z \leq 6\}$.

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zylinderkoordinaten eine Parameterdarstellung Φ von S,

(ii) Berechnen Sie für die Funktion $f(x, y, z) := x^2 + y^2$ das Oberflächenintegral $\displaystyle\int_\Phi f\, d\sigma$.

b) Es sei A eine reellwertige (3×3)-Matrix und $\Phi_R([0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ die Oberfläche der dreidimensionalen Kugel um den Nullpunkt mit Radius $R > 0$ und der Parameterdarstellung

$$\Phi_R(u, v) := (R \cos v \cos u, R \cos v \sin u, R \sin v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, x \mapsto Ax \cdot x$ das Oberflächenintegral $\displaystyle\int_{\Phi_R} f\, d\sigma$.

Hinweis zu b): Falls Sie den Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ kennen, können Sie versuchen, diesen gewinnbringend einzusetzen.

Aufgabe 48 (K)

Berechnen Sie

$$\int_\gamma (-y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz),$$

wobei γ der positiv orientierte Weg sei, welcher durch Schneiden des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ mit der Ebene $x + y + z = 1$ entsteht,

a) direkt,

b) mit Hilfe des *Integralsatzes von Stokes*.

Aufgabe 49

B_r sei die dreidimensionale Kugel um den Nullpunkt mit Radius $r > 0$, und Φ_r die dazugehörige Oberfläche (siehe Aufgabe 47 b). Zeigen Sie: Für jedes $R > 0$ und jede integrierbare Funktion $f : B_R \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{B_R} f(x,y,z) d(x,y,z) = \int_0^R \left(\int_{\Phi_r} f \, d\sigma \right) dr.$$

Registrierung für Proseminare im Sommersemester 2011

Diejenigen Studierenden, die im Sommersemester 2011 ein Proseminar belegen wollen, werden gebeten, sich bis einschließlich

Mittwoch, den 19. Januar 2011,

für die Proseminareinteilung auf unserer Homepage über den folgenden Link zu registrieren :

http://www.math.kit.edu/event/anmeldprosem/

Diese Registrierung erlaubt uns in einem ersten Schritt, den Bedarf zu bestimmen und eine entsprechende Zahl von Proseminaren einzurichten. Die registrierten Studierenden werden angeschrieben, sobald die Proseminare feststehen, und können dann ebenfalls unter dem obigen Link die von ihnen gewünschten Proseminare auswählen. Auch die letztendliche Verteilung auf die Proseminare wird unter dem obigen Link bekanntgegeben werden.