

Analysis III

12. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 28.01.2011, 11.30 Uhr.

Aufgabe 50 (K)

- (1) Es seien $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$, $p \in [1, \infty)$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie, daß genau dann $f \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt, wenn $|f|^{p-1}f \in \mathcal{L}^1(X)$.
- (2) Es seien $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$, $p, q \in [1, +\infty)$ und $f, f_n \in \mathcal{L}^p(X) \cap \mathcal{L}^q(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Folgt dann auch $\|f_n - f\|_q \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$?
- (3) Für welche $p \in [1, \infty]$ sind die folgenden Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ Elemente von $\mathcal{L}^p(X)$?
 - a) $X = \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x$,
 - b) $X = \mathbb{R}^d$, $f(x) := (1 + \|x\|^2)^{\alpha/2}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$,
 - c) $X = U_1(0) \subseteq \mathbb{R}^d$, $f(x) := \|x\|^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 51

- a) Es seien $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$, $p \in [1, \infty]$ sowie $f, f_n \in \mathcal{L}^p(X)$ und $g, g_n \in \mathcal{L}^{p'}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ und $\|g_n - g\|_{p'} \rightarrow 0$, jeweils für $n \rightarrow \infty$. Zeigen Sie, daß $\|f_n g_n - f g\|_1 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.
- b) Es seien $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$, $p, q, r \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ sowie $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X)$. Zeigen Sie, daß

$$fg \in \mathcal{L}^r(X) \quad \text{mit} \quad \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

- c) Es seien $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$, $p, q, r \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ sowie $f \in \mathcal{L}^p(X)$, $g \in \mathcal{L}^q(X)$ und $h \in \mathcal{L}^r(X)$. Zeigen Sie, daß

$$fgh \in \mathcal{L}^1(X) \quad \text{mit} \quad \|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

Aufgabe 52

(Integraloperatoren) Es seien $X \in \mathfrak{B}_d$ und $Y \in \mathfrak{B}_k$ jeweils beschränkt und $1 < p, q < \infty$. Für die meßbare Funktion $K : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

$$M := \left(\int_X \left(\int_Y |K(x, y)|^{p'} dy \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Es sei weiter $f \in \mathcal{L}^p(Y)$.

- a) Zeigen Sie, daß $K(x, \cdot) \in \mathcal{L}^{p'}(Y)$ für alle $x \in X \setminus N$ mit einer Nullmenge $N \in \mathfrak{B}_d$, und daß für alle $x \in X \setminus N$ das Integral

$$(Tf)(x) := \int_Y K(x, y) f(y) dy \quad (*)$$

endlich ist.

- b) Definiere nun die Funktion $Tf : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch $(Tf)(x) := 0$ falls $x \in N$ und $(Tf)(x)$ wie in (*) falls $x \in X \setminus N$. Zeigen Sie, daß Tf meßbar ist und daß $Tf \in \mathcal{L}^q(X)$ mit

$$\|Tf\|_q \leq M \|f\|_p.$$

Aufgabe 53 (K)

Für welche $p \in [1, \infty]$ liegen \widehat{f}_n , $n \in \mathbb{N}$, für die im folgenden definierten f_n in $L^p(X)$ und konvergieren für $n \rightarrow \infty$ im normierten Raum $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$?

- a) $X = (0, +\infty)$, $f_n(x) := \begin{cases} x^\alpha/n, & \text{falls } x \in [0, n], \\ 0, & \text{falls } x > n, \end{cases}$ mit einer Konstanten $\alpha \in (0, 1)$,
- b) $X = (0, +\infty)$, $f_n(x) := e^{-nx^2}/\sqrt{x}$.

Prüfungsankündigung *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung* Analysis 1/2 und Analysis 3

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 23. März 2011, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2),

und die Abschlußklausur zur Analysis 3 (Bachelor-Modulprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Donnerstag, den 24. März 2011, 14-16 Uhr.

- Studierende der PHYSIK, MATHEMATIK UND INFORMATIK, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- DIPLOMSTUDIERENDE der PHYSIK UND INFORMATIK sowie STUDIERENDE AUF LEHRAMT melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).
- DIPLOMMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4B-01 (Allianzgebäude) bei Dr. Kühnlein,
- DIPLOM-WIRTSCHAFTSMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 3C-08 (Allianzgebäude) bei Dr. Neher,
- DIPLOM-TECHNOMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4C-21 (Allianzgebäude) bei Dr. Hettlich.

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

Anmeldeschluß für die Abschlußklausuren (Analysis 1/2, Analysis 3): 23. Februar 2011.

Alle Informationen zur BACHELOR-MODULPRÜFUNG/ZWISCHENPRÜFUNG/DIPLOMVORPRÜFUNG ANALYSIS 1/2 UND ANALYSIS 3 finden Sie auch unter

<http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de>

Link zum QISPOS: <https://studium.kit.edu/>

Übungsschein Analysis 3

Für den *Übungsschein* zur Analysis 3 ist keine Anmeldung erforderlich. Im Falle des Erlangens wird der Übungsschein im Anschluß an die Vorlesungszeit in Papierform ausgestellt.