KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dr. Alexander Ullmann

WS 2010/11
28.01.2011

Analysis III

13. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 04.02.2011, 11.30 Uhr.

Aufgabe 54

Beweisen Sie Satz 16.8 der Vorlesung: Sei $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $p \in [1, +\infty)$. Dann liegt $C_c(X, \mathbb{R})$ dicht in $L^p(X)$.

Anleitung:

- *Überlegen Sie sich zunächst, daß es wegen Satz 16.7 o.B.d.A. reicht, Funktionen* $\mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^p(X)$ *mit* $A \in \mathfrak{B}(X), \lambda_d(A) < +\infty$ *zu betrachten.*
- *Zu* $\varepsilon > 0$ *können Sie nun eine beschränkte Menge* $B \in \mathfrak{B}(A)$ *wählen mit* $\lambda_d(A) \leq \lambda_d(B) + (\varepsilon/2)^p$*, also* $\| \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B \|_p < \varepsilon/2$*, und mithilfe von Aufgabe 11 findet man eine kompakte Menge* K *und eine beschränkte offene Menge* U *mit* $K \subseteq B \subseteq U \subseteq X$ *und* $\lambda_d(U \backslash K) \leq (\varepsilon/2)^p$.
- *Definiere nun* $h : X \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 - \min\left\{1, \frac{\operatorname{dist}(x,K)}{\operatorname{dist}(X \backslash U, K)}\right\}$*, wobei* $\operatorname{dist}(x, M) := \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}$ *und* $\operatorname{dist}(N, M) := \inf\{\|x - y\| \mid x \in X, y \in M\}$.

Aufgabe 55 (K)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Fouriertransformierte $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx$.

a) $f(x) := xe^{-|x|}$,

b) $f(x) := \max\{0, 1 - |x|\}$,

c) $f(x) := \begin{cases} e^{ix}, & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$,

d) $f(x) := \begin{cases} \cos x, & \text{falls } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Aufgabe 56 (K)

Es sei $d \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_{\leq d}$ und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Wir bezeichnen im folgenden die durch $x = (x_1, \ldots, x_d) \mapsto x_j f(x)$ definierte Funktion etwas lax mit $x_j f$. Zeigen Sie:

a) Ist $x_j f \in \mathcal{L}^1(X)$, so ist $\widehat{f}$ partiell nach ξ_j differenzierbar mit $\partial_j \widehat{f} = -i\widehat{x_j f}$.

b) Ist f stetig differenzierbar mit $\partial_j f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und gilt zusätzlich

- $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$ („*f verschwindet im Unendlichen*“) falls $d = 1$,
- $\operatorname{supp}(f)$ ist kompakt falls $d \geq 2$,

so gilt $\widehat{\partial_j f} = i\xi_j \widehat{f}$.

Hinweis: $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = y$ *bedeutet, daß es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $R > 0$ *gibt mit* $|f(x) - y| < \varepsilon$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^d$ *mit* $\|x\| \geq R$*, oder auch gleichbedeutend, daß* $f(x_n) \to y$ *für jede Folge* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ *mit* $\|x_n\| \to \infty$.

Anmerkung: Die zusätzliche Forderung $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ *im Fall* $d \geq 2$ *kann gestrichen werden, in diesem Fall muß man aber eine entsprechende Variante der partiellen Integration für diesen Typ Funktionen im* $\mathbb{R}^d$ *herleiten.*

Aufgabe 57

(*Riemann-Lebesgue Lemma*) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Dann ist $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ mit $\lim_{\|\xi\| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$, und es gilt $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Hinweis: Verwenden Sie, daß $C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 58

Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

b) Es sind $\widehat{f}g$ und $f\widehat{g}$ integrierbar, und es gilt $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}g \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g} \, dx$.

c) (*Satz von Plancherel*) Gilt zusätzlich $\widehat{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, so sind $f \cdot \overline{g}$ und $\widehat{f} \cdot \overline{\widehat{g}}$ integrierbar, und es gilt:

$$(\widehat{f} \,|\, \widehat{g}) = (2\pi)^d \, (f \,|\, g).$$

Hinweis zu c): Inversionsformel für die Fouriertransformation und Teil b).

Anmerkung: Die Voraussetzung an g in Teil c) ist nach Aufgabe 56 b) insbesondere dann erfüllt, wenn $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ ist, und g sowie alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung von g im Unendlichen verschwinden.

Prüfungsankündigung *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung* Analysis 1/2 und Analysis 3

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 23. März 2011, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2),

und die Abschlußklausur zur Analysis 3 (Bachelor-Modulprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Donnerstag, den 24. März 2011, 14-16 Uhr.

- Studierende der Physik, Mathematik und Informatik, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- Diplomstudierende der Physik und Informatik sowie Studierende auf Lehramt melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).
- Diplommathematiker melden sich an in Zimmer 4B-01 (Allianzgebäude) bei Dr. Kühnlein,
- Diplom-Wirtschaftsmathematiker melden sich an in Zimmer 3C-08 (Allianzgebäude) bei Dr. Neher,
- Diplom-Technomathematiker melden sich an in Zimmer 4C-21 (Allianzgebäude) bei Dr. Hettlich.

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

Anmeldeschluß für die Abschlußklausuren (Analysis 1/2, Analysis 3): 23. Februar 2011.

Alle Informationen zur Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung Analysis 1/2 und Analysis 3 finden Sie auch unter

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de

Link zum QISPOS: https://studium.kit.edu/

Übungsschein Analysis 3

Für den *Übungsschein* zur Analysis 3 ist keine Anmeldung erforderlich. Im Falle des Erlangens wird der Übungsschein im Anschluß an die Vorlesungszeit in Papierform ausgestellt.