

## Analysis III

### 1. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 26.10.2012, 11.30 Uhr.

#### Aufgabe 1

Geben Sie ein Beispiel an, für

- (a) Mengen  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$  so, dass  $Y$  in  $X$  abgeschlossen, aber nicht abgeschlossen in  $\mathbb{R}^3$  ist,
- (b) Mengen  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$  so, dass  $Y$  offen in  $X$  und abgeschlossen in  $\mathbb{R}^3$  ist,
- (c) eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^2$  mit endlich vielen Elementen,
- (d) eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^2$  mit überabzählbar vielen Elementen,
- (e) ein Mengensystem  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A})$ ,
- (f) einen Erzeuger  $\mathcal{E}$  von  $\mathcal{B}(K)$ , wobei  $K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ .

Frage zu (c) und (d): Gibt es auch eine  $\sigma$ -Algebra mit abzählbar unendlich vielen Elementen?

#### Aufgabe 2 (K)

(a) Es seien  $X, Y$  nichtleere Mengen,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung sowie  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$  ist.

(3 Punkte)

(b) Es sei  $X$  eine nichtleere Menge und  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  ein Mengensystem mit den folgenden Eigenschaften:

$$(\sigma_1) \quad X \in \mathcal{A},$$

$$(\sigma_2) \quad A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A},$$

$$(\sigma_3') \quad \text{für jede disjunkte Folge } (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathcal{A} \text{ gilt } \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A}$  genau dann eine  $\sigma$ -Algebra ist, wenn für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  auch  $A \cap B \in \mathcal{A}$  gilt.

(3 Punkte)

### Aufgabe 3 (K)

(a) Es sei  $X$  eine nichtleere Menge und  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine disjunkte Folge in  $\mathcal{P}(X)$  mit  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j = X$ .  
Bestimmen Sie  $\sigma(\{X_j \mid j \in \mathbb{N}\})$ . (4 Punkte)

(b) Es sei  $d \in \mathbb{N}$  sowie

$$\mathcal{E}_1 := \{[a, b] \in \mathbb{R}^d \mid a, b \in \mathbb{Q}^d \text{ mit } a \leq b\} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_2 := \{A \subseteq \mathbb{R}^d \mid A \text{ ist kompakt}\}.$$

Zeigen Sie

$$\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2).$$

(4 Punkte)

### Aufgabe 4

Es sei  $X$  eine nichtleere Menge,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$  sowie  $\mathcal{A} := \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} \mid \mathcal{A} \text{ ist höchstens abzählbar}\}$ .  
Zeigen Sie

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}} \sigma(\mathcal{A}).$$

## Allgemeine Hinweise

### zum Übungsbetrieb

Jeden Freitag erscheint ein Übungsblatt zur schriftlichen Bearbeitung und kann im Allianzgebäude (3. Stock, gegenüber vom Fahrstuhl) abgeholt oder von der Webseite

<http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/ana32012w/de>.

heruntergeladen werden. Auf jedem Übungsblatt befinden sich 4 Aufgaben, die zur Korrektur abgegeben werden können. Die bearbeiteten Aufgaben müssen zur Abgabe in die Abgabekästen im 3. Stock des Allianzgebäudes (vom Fahrstuhl geradeaus auf der linken Seite, neben Raum 3A-03) geworfen werden. Der späteste Abgabetermin ist dem jeweiligen Übungsblatt zu entnehmen. In der Regel ist dies um 11:30 Uhr am Freitag der folgenden Woche nach Auslage des jeweiligen Übungsblattes. Die Rückgabe der korrigierten Übungsblätter sowie die Bereitstellung von Lösungsvorschlägen erfolgt in den Tutorien. Zusätzlich werden Lösungsvorschläge für die jeweiligen Übungsblätter auf der oben genannten Website zum Download bereitgestellt.

### zum Übungsschein

Auf jedem Übungsblatt sind maximal 14 Punkte zu erreichen, wobei jeweils 2 Aufgaben mit **K** und einer Punktzahl markiert sind. Die erreichten Punkte bei diesen **K**-Aufgaben sind relevant für den Schein. Einen Übungsschein erhält, wer

- (a) auf den Übungsblättern 1-7 mindestens 50% der zu erreichenden Punkte und
- (b) auf den Übungsblättern 8-14 mindestens 50% der zu erreichenden Punkte erzielt.

Da die Scheinausgabe je nach Studiengang variiert, wird deren genaue Organisation rechtzeitig im Laufe des Semesters bekanntgegeben.

### zur Klausur

Die Klausur zur Vorlesung Analysis III findet statt am

**Donnerstag, den 21. März 2013, 14-16 Uhr.**

Die Anmeldemodalitäten werden rechtzeitig im Laufe des Semesters bekanntgegeben.