KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2012/2013
26.10.2012

Analysis III

2. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 02.11.2012, 11.30 Uhr.

Aufgabe 5

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) $X \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $X \notin \mathcal{F}_3$,

(b) einen Ring, der keine σ-Algebra ist,

(c) ein endliches Maß, welches kein Wahrscheinlichkeitsmaß ist,

(d) eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ und eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ welche (M1) erfüllt, aber (M2) nicht,

(e) eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ und eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $A_{j+1} \subseteq A_j$ und $A_j \neq \emptyset$ für alle $j \in \mathbb{N}$ sowie $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j = \emptyset$,

(f) eine nichtleere Menge X und eine Folge $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von σ-Algebren auf X mit $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ keine σ-Algebra auf X ist.

Aufgabe 6 (K)

Es sei X nichtleere eine Menge und für $x \in X$ sei das Diracmaß definiert durch

$$\delta_x : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}, \qquad \delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

(a) Es sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass δ_x ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist. (2 Punkte)

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in [0, \infty)$. Zeigen Sie, dass

$$\delta : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty), \qquad \delta(A) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_{x_j}(A)$$

ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist und bestimmen Sie das Bild $\delta(\mathcal{P}(X))$. (2 Punkte)

(c) Es sei $X = \mathbb{N}$ und δ ein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass genau eine Folge $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $[0, \infty]$ existiert mit

$$\forall_{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})} : \ \delta(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \delta_j(A).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 7 (K)

(a) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(2 Punkte)

(b) Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Außerdem sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(M2') für $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt gilt $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$,

(M3) für jede Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_{j+1} \subseteq A_j$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Zeigen Sie, dass μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist. (5 Punkte)

Aufgabe 8

(a) Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Intervallen in $\mathbb{R}^d$ mit $I_n := [a^{(n)}, b^{(n)}]$ und $I_{n+1} \subseteq I_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $(a^{(n)} - b^{(n)}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zeigen Sie, dass $\lambda_d(I_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und genau ein $x \in \mathbb{R}^d$ existiert mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$.

(b) Beweisen Sie Lemma 2.1.: Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{F}_d$, sowie $\{I_1, ..., I_m\} \subseteq J_d$ und $\{I'_1, ..., I'_n\} \subseteq J_d$ jeweils paarweise disjunkte Zerlegungen von A, also

$$\bigcup_{j=1}^{m} I_j = A = \bigcup_{k=1}^{n} I'_k.$$

Zeigen Sie

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_d(I_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_d(I'_k).$$

Bemerkung: In beiden Teilaufgaben sollen Sie nicht mit den Eigenschaften des Lebesguemaßes arbeiten, sondern folgende elemtare Definition für λ_d verwenden: Für $I = (a, b]$ mit $a \leqslant b$ und $a, b \in \mathbb{R}^d$ ist

$$\lambda_d(I) := \begin{cases} 0, & I = \emptyset, \\ \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k), & I \neq \emptyset. \end{cases}$$

In (b) könnte man folgendermaßen vorgehen: Es sei $I := (a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leqslant b$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Z}_k := \left\{ \frac{z}{k} \mid z \in \mathbb{Z} \right\}$ und α_k die Anzahl der Elemente der Menge $I \cap \mathbb{Z}_k$. Zeigen Sie dann

$$\lambda_1(I) = b - a = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_k}{k}$$

und verallgemeinern Sie diese Formel auf Intervalle in $\mathbb{R}^d$ für $d \in \mathbb{N}$.