KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2012/2013
02.11.2012

Analysis III

3. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 09.11.2012, 11.30 Uhr.

Aufgabe 9

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) eine bijektive messbare Funktion f mit $\lambda_3(f(A)) = \frac{1}{2}\lambda_3(A)$ für jedes $A \in \mathcal{F}_3$,

(b) eine σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}^d$ so, dass $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit $f(x) := x$ nicht $(\mathcal{B}_d, \mathcal{B})$-messbar ist,

(c) Funktionen f, g mit $f + g$ Borel-messbar aber weder f noch g Borel-messbar,

(d) eine Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die weder monoton noch stetig ist,

(e) eine Menge $A_\epsilon \subseteq [0, 1]$ mit $\lambda_1(A_\epsilon) = \epsilon$, $\overline{A_\epsilon} = [0, 1]$ und $A_\epsilon^o \neq \emptyset$ für $\epsilon \in (0, 1)$,

(f) eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $A^o = \emptyset$ und $\lambda_1(A) > 0$,

(g) eine offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $\lambda_1(\partial A) > 0$.

Aufgabe 10

Es sei $\epsilon \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $O_\epsilon \subseteq [0, 1]$ existiert mit $\overline{O_\epsilon} = [0, 1]$ und $\lambda_1(O_\epsilon) = \epsilon$.

Aufgabe 11 (K)

Es sei $d \in \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{N}_d := \{N \subseteq \mathbb{R}^d \mid \text{ es existiert ein } M \in \mathcal{B}_d \text{ mit } N \subseteq M \text{ und } \lambda_d(M) = 0\}$$

sowie

$$\mathcal{L}_d := \{B \cup N \mid B \in \mathcal{B}_d,\ N \in \mathcal{N}_d\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_d$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ ist. (3 Punkte)

(b) Es sei $\mu_d : \mathcal{L}_d \to [0, \infty]$ definiert durch $\mu_d(L) := \lambda_d(B)$ für $L = B \cup N$. Zeigen Sie, dass μ_d wohldefiniert und ein Maß auf $\mathcal{L}_d$ ist. (4 Punkte)

Hinweis: $\mathcal{N}_d$ nennt man die Lebesgueschen Nullmengen und $\mathcal{L}_d$ die Lebesguesche σ-Algebra.

— bitte wenden —

Aufgabe 12 (K)

Es seien $d, m, k \in \mathbb{N}$.

(a) Es seien $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ und $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ Borel-messbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $\phi(x) := f(x, g(x) \cdot h(x))$ Borel-messbar ist. (2,5 Punkte)

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-messbar und

$$\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{sign} \circ f$ Borel-messbar ist. (1,5 Punkte)

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f Borel-messbar ist. (3 Punkte)