KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2012/2013
09.11.2012

Analysis III

4. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 16.11.2012, 11.30 Uhr.

Aufgabe 13

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) eine konvergente Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ von paarweise verschiedenen, unbeschränkten Funktionen, deren Grenzfunktion Borel-messbar ist,

(b) eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konstanter Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n \neq \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$,

(c) eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen mit Grenzfunktion

$$f:\mathbb{R}\to\{0,\infty\},\ f(x):=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\\ \infty, & x\in\mathbb{Q},\end{cases}$$

(d) eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen auf $[0,\infty)$ mit Grenzfunktion

$$f:[0,\infty)\to[0,\infty),\ f(x):=x^3,$$

(e) eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ die nicht durch einfache Funktionen approximiert werden kann.

Aufgabe 14 (K)

(a) Es sei $d\in\mathbb{N}$ und $y\in\mathbb{R}^d$ sowie $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\tau_y f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ mit $\tau_y f(x):=f(x-y)$ genau dann Borel-messbar ist, wenn f Borel-messbar ist. (1 Punkt)

(b) Es sei $d\in\mathbb{N}$ und $\overline{U_1}(0)\subseteq\mathbb{R}^d$ die abgeschlossene Kugel mit Radius 1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f:\overline{U_1}(0)\to\overline{\mathbb{R}},\ f(x):=\begin{cases}\infty, & x=0,\\ (-1)^n\|x\|^{2n+1}, & x\in\{y\in\mathbb{R}^d \mid \frac{1}{n+1}<\|y\|\leqslant\frac{1}{n}\}\text{ für } n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Borel-messbar ist. (2 Punkte)

(c) Es seien X eine nichtleere Menge und $A,B\in\mathcal{P}(X)$ sowie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B$,

(ii) $A\subseteq B \iff \forall_{x\in X}:\ \mathbb{1}_A(x)\leqslant\mathbb{1}_B(x)$,

(iii) $\mathbb{1}_{A_v}=\sup\limits_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{A_i}$ mit $A_v:=\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}A_i$,

(iv) $\mathbb{1}_{A_s}=\inf\limits_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{A_i}$ mit $A_s:=\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}}A_i$.

(Jeweils 1 Punkt)

Aufgabe 15

Es sei μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Bauen Sie analog zum Vorgehen aus der Vorlesung für das Lebesgue-Integral ein Integral bezüglich des Maßes μ für nichtnegative Funktionen auf.
Gehen Sie dabei wie folgt vor: Es sei $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ eine einfache Funktion mit Normaldarstellung $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$. Dann setzen wir

$$\int_{\mathbb{N}} f(x)\ \mathrm{d}\mu(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

(a) Es sei $\sum_{j=1}^{k} b_j \mathbb{1}_{B_j}$ eine beliebige Darstellung von f. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{N}} f(x)\ \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^{k} b_j \mu(B_j).$$

(b) Es sei $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$. Zeigen Sie, dass eine aufsteigende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen auf $\mathbb{N}$ mit $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ für $x \in \mathbb{N}$ existiert.

(c) Es sei $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit den Eigenschaften aus (b). Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{N}} f(x)\ \mathrm{d}\mu(x) := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n(x)\ \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f(j).$$

Aufgabe 16 (K)

(a) Zeigen Sie jeweils die Borel-Messbarkeit der Funktion f und berechnen Sie $\int_X f(x)\ \mathrm{d}x$, wobei X der jeweils angegebene Definitionsbereich ist.

(i) $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) := [e^x]$,

(ii) $f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) := 2^{-\frac{n}{2}}$ für $x \in [n, n + 1)$ und $n \in \mathbb{N}_0$,

(iii) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ f(x) := \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$

(iv) $f : (0, 1] \to (0, \infty),\ f(x) := \dfrac{\cos(x) + x}{x^2}$.

(Jeweils 1,5 Punkte)

(b) Es sei $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{B}_d$ und $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung:

$$\forall_{\alpha\in(0,\infty)} :\ \lambda_d(\{f \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_X f(x)\ \mathrm{d}x.$$

(1 Punkt)