KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2012/2013
INSTITUT FÜR ANALYSIS 16.11.2012
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

Analysis III

5. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 23.11.2012, 11.30 Uhr.

Aufgabe 17

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) $X \in \mathcal{B}_d$ und eine integrierbare Funktion $f \notin \mathcal{L}^1(X)$,

(b) $X \in \mathcal{B}_d$ und intergrierbare Funktionen $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\displaystyle\int_X f(x)\, \mathrm{d}x = \int_X g(x)\, \mathrm{d}x$ mit $\lambda_d(\{f \neq g\}) > 0$,

(c) $X \in \mathcal{B}_d$ und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X integrierbarer Funktionen mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ nicht integrierbar,

(d) $X \in \mathcal{B}_d$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, integrierbar und nicht beschränkt,

(e) $X \in \mathcal{B}_d$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, beschränkt und nicht integrierbar,

Aufgabe 18 (K)

(a) Überprüfen Sie die angegebenen Funktionen auf Integrierbarkeit auf dem jeweiligen Definitionsbereich. (Jeweils 1 Punkt)

(i) Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{g(x)^2 - g(x)}{\exp(g(x)^2)+1}$ und $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

(ii) $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f(x) := \begin{cases} \operatorname{cotan}(x) x^{\frac{3}{4}}, & x \in (0,1], \\ -\infty, & x = 0. \end{cases}$

(b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. (Jeweils 2 Punkte)

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{|\cos(x)|}\, \mathrm{d}x,$ (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[-1,\infty)} e^{-nx^2}\, \mathrm{d}x.$

(c) Es sei $a_k := \displaystyle\int_{[0,1]} \frac{x}{(x+1)^k}\, \mathrm{d}x$ für $k \in \mathbb{N}$. Überprüfen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (2 Punkte)

Aufgabe 19

(a) Es sei $X \in \mathcal{B}_d$ und $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mu : \begin{cases} \mathcal{B}(X) & \to & [0, \infty], \\ A & \mapsto & \int_A f(x) \, \mathrm{d}x, \end{cases}$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(X)$ definiert.

(b) Es sei $y \in \mathbb{R}^d$ und $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ sowie $\tau_y f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\tau_y f(x) := f(x - y)$. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn $\tau_y f$ integrierbar ist und dass in diesem Fall gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_y f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Hinweis zu (b): Zeigen Sie die Aussage zuerst für einfache Funktionen.

Aufgabe 20 (K)

Es sei $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$.

(a) Es sei zusätzlich $\lambda_d(X) < \infty$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf X gleichmäßig gegen $f : X \to \mathbb{R}$ konvergent. Zeigen Sie $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_X f(x) \, \mathrm{d}x.$$

(2,5 Punkte)

(b) Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zusätzlich aufsteigend und punktweise auf X gegen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergent. Außerdem gelte

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Zeigen Sie, dass f integrierbar ist und

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_X f(x) \, \mathrm{d}x.$$

(3,5 Punkte)