KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2012/2013
23.11.2012

Analysis III

6. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 30.11.2012, 11.30 Uhr.

Aufgabe 21

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) eine Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ welche Lebesgue-integrierbar aber nicht uneigentlich Riemann-integrierbar ist,

(b) eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ und eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $\lambda_1(U(f)) = 1$ ($U(f)$ wie in Aufgabe 23 (a)),

(c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} f_n(x)\, \mathrm{d}x \neq 0$,

(d) eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ fast überall und $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ nicht messbar,

(e) eine Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ welche uneigentlich Riemann-integrierbar aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 22 (K)

Prüfen Sie die folgenden Funktionen auf Messbarkeit, Lebesgue- und uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls $\int_X f(x)\, \mathrm{d}x$.

(a) $X = (0, 1]$ und $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ mit $f_\alpha(x) := x^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, (1,5 Punkte)

(b) $X = [1, \infty)$ und $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ mit $f_\alpha(x) := x^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, (1,5 Punkte)

(c) $X := (0, 1]$ und $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^{-\frac{1}{3}} \mathbb{1}_{(0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) + x^{-\frac{4}{3}} \mathbb{1}_{(0,1]\setminus\mathbb{Q}}(x)$, (2 Punkte)

(d) $X = [1, \infty)$ und $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{x} \sin(x^2)$. (2 Punkte)

— bitte wenden —

Aufgabe 23

(a) Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $U(f) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$. Zeigen Sie

$$U(f) \text{ ist eine Borel-Nullmenge} \implies f \text{ ist } (\mathcal{L}_d, \mathcal{B}_1)\text{-messbar}.$$

(b) Es sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geqslant 2$ und $D \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ kompakt sowie $f \in C(D, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass der Graph von f gegeben durch

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

eine Borel-Nullmenge ist.

(c) Zeigen Sie, dass $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = 1\}$ eine Borel-Nullmenge ist.

Hinweis zu (a): Sie können ohne Beweis verwenden, dass $U(f) \in \mathcal{B}_d$ gilt.

Hinweis zu (b): Überdecken Sie G_f durch $\bigcup_{k=1}^{n}(Q_k \times I)$ mit geeigneten Mengen Q_k und einem Intervall I. Sie können in diesem Zusammenhang ohne Beweis folgende Aussage verwenden: Seien $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geqslant 2$, $X \in \mathcal{B}_{d-1}$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann gilt $\lambda_d(X \times I) = \lambda_1(I)\lambda_{d-1}(X)$.

Aufgabe 24 (K)

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \sqrt[n]{e^{nx} + x(n+1)^2}\,\mathrm{d}x,$ (1,5 Punkte)

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x,$ (1,5 Punkte)

(b) Es sei $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{B}_d$ und $g \in \mathcal{L}^1(X)$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{[-n,n]^d \cap X} \|x\| g(x)\,\mathrm{d}x,$ (2 Punkte)

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \int_X \log\left(1 + \frac{g(x)}{n}\right)\,\mathrm{d}x$ mit $g(x) \geqslant 0$ für $x \in X$. (2 Punkte)

Hinweise zur Klausur Analysis III

Bitte besuchen Sie für alle Informationen bezüglich der Klausur zur Vorlesung Analysis III (insbesondere Anmeldeschluss!) die Seite

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de