KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2012/2013
INSTITUT FÜR ANALYSIS 30.11.2012
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

Analysis III

7. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 07.12.2012, 11.30 Uhr.

Aufgabe 25

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) $X \in \mathcal{B}_d$ und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, \infty]$ mit

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)(x)\ \mathrm{d}x < \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

(b) $X \in \mathcal{B}_d$ und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, \infty]$ mit

$$\int_X (\limsup_{n\to\infty} f_n)(x)\ \mathrm{d}x > \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

(c) eine Funktion $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit den Eigenschaften (i)-(iii) aus Aufgabe 27 (b),

(d) $f \in \mathcal{L}^1([0, \infty)) \cap C([0, \infty), \mathbb{R})$ so, dass nicht $f(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt.

Aufgabe 26

Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und integrierbar. Zeigen Sie:

(a) Für $y \in \mathbb{R}^d$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{U_{n+1}(y)\setminus U_n(y)} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass für jedes $B \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda_d(B) < \delta$ gilt $\displaystyle\int_B |f(x)|\ \mathrm{d}x < \epsilon$.

(c) Es gilt $\tau_{nz} f \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ fast überall für $z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$.

Bemerkung zu (c): Für die Definition von $\tau_y f$ siehe Aufgabe 19 (b).

Aufgabe 27 (K)

Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

(a) Es sei $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ stetig und es existiere ein kompaktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus I$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi * f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ mit } \ (\varphi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - y) f(y) \, \mathrm{d}y$$

wohldefiniert ist. Zeigen Sie außerdem, dass $\varphi * f$ differenzierbar ist, falls φ stetig differenzierbar ist und in diesem Fall $(\varphi * f)' = \varphi' * f$ gilt. (3 Punkte)

(b) Es sei f zusätzlich stetig und beschränkt und $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

(i) $\varphi(x) \geqslant 0$ für $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, \mathrm{d}x = 1$,

(iii) es existiert $C \geqslant 0$ mit $\varphi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus [-C, C]$.

Ferner sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $\varphi_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$. Zeigen Sie $\varphi_n * f \xrightarrow{n \to \infty} f$ punktweise auf $\mathbb{R}$. (4 Punkte)

Bemerkung: Die Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nennt man approximative Identität und den Ausdruck $g * f$ aus (a) nennt man Faltung von g und f.

Aufgabe 28 (K)

Es sei $I := [\alpha, \beta]$ mit $\alpha < \beta$ sowie $a, b : I \to I^o$ differenzierbar. Ferner sei $f \in C(I \times I)$ und die partielle Ableitung nach der ersten Variablen $\dfrac{\partial f}{\partial t} : I^o \times I^o \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) \, \mathrm{d}x$$

auf I^o differenzierbar ist mit Ableitung

$$F'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) \, \mathrm{d}s + b'(t) f(t, b(t)) - a'(t) f(t, a(t)).$$

(6 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass F aus (a) sogar stetig differenzierbar ist, falls a und b stetig differenzierbar sind. (1 Punkt)

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $G : I \times I \times I \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x, y, z) := \int_z^y f(x, s) \, ds$. Zeigen Sie, dass $G \in C^1(I^o \times I^o \times I^o)$ und berechnen Sie die Ableitung.

Hinweise zur Klausur Analysis III

Bitte besuchen Sie für alle Informationen bezüglich der Klausur zur Vorlesung Analysis III (insbesondere Anmeldeschluss!) die Seite

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de