KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2012/2013
07.12.2012

Analysis III

8. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 14.12.2012, 11.30 Uhr.

Aufgabe 29

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) eine Abbildung $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$G^{-1}(\{0\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2 - z^2\},$$

(b) $d \in \mathbb{N}$, eine Menge $C \in \mathcal{B}_d$ und eine bijektive Abbildung $A : \{C^x \mid x \in \mathbb{R}^k\} \to \{C_y \mid y \in \mathbb{R}^l\}$ (wobei $d = k + l$),

(c) $d \in \mathbb{N}$, eine Menge $C \in \mathcal{B}_d$ so, dass ein $x \in \mathbb{R}^k$ existiert mit $C_y \subseteq C^x$ für alle $y \in \mathbb{R}^l$ (wobei $d = k + l$),

(d) Folgen $(A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ mit $A_d \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda_d(A_d) > 0$ sowie jeweils einer der folgenden Eigenschaften:

(i) $\lambda_d(A_d) \overset{d\to\infty}{\longrightarrow} \infty$,

(ii) $\lambda_d(A_d) = 2$ für $d \in \mathbb{N}$,

(iii) $\lambda_d(A_d) \overset{d\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Aufgabe 30

Es sei $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ und die sogenannte Transportgleichung

$$\text{(TG)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= f(t,x), \qquad && (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= u_0(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Es sei $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := u_0(x-t) + \int_0^t f(s, s + (x-t))\, \mathrm{d}s.$$

Zeigen Sie, dass u auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ partiell differenzierbar ist und die Transportgleichung (TG) erfüllt.

(b) Setzen Sie $f(t,x) = 0$ für $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ und interpretieren Sie anhand der Lösung aus (a) den Namen Transportgleichung.

Aufgabe 31 (K)

Zeigen Sie die Messbarkeit der folgenden Mengen und berechnen Sie anschließend jeweils das Lebesguemaß. (Jeweils 2 Punkte)

(a) $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (1, e),\ x^2 - z\log(z) < 1 - y^2\}$

(b) $B := B_1(r) \cap B_2(r)$ mit $r \in (0, \infty)$ sowie

$$B_1(r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant r\} \ \text{ und } \ B_2(r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leqslant r\}.$$

(c) $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \leqslant 3,\ y^2 \leqslant 2 \text{ und } \sqrt{|z|} \leqslant \sqrt{3 - x^2}\sqrt{2 - y^2}\}.$

Aufgabe 32 (K)

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $d_1, ..., d_n \in \mathbb{N}$. Ferner seien $B_k \in \mathcal{B}_{d_k}$ für $k \in \{1, ..., n\}$ gegeben und $d := \sum_{k=1}^{n} d_k$ sowie

$$B := B_1 \times B_2 \times .... \times B_n = \big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^d \mid x_k \in B_k \text{ für } k \in \{1, ..., n\}\big\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Falls $\lambda_{d_k}(B_k) < \infty$ für $k \in \{1, ..., n\}$ so gilt

$$\lambda_d(B) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_{d_k}(B_k).$$

(4 Punkte)

(ii) Existiert ein $l \in \{1, ..., n\}$ mit $\lambda_{d_l}(B_l) = \infty$ und $\lambda_{d_k}(B_k) > 0$ für alle $k \neq l$ so gilt $\lambda_d(B) = \infty$. (1,5 Punkte)

(iii) Existiert ein $l \in \{1, ..., n\}$ mit $\lambda_{d_l}(B_l) = 0$ so gilt $\lambda_d(B) = 0$. (0,5 Punkte)

(b) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{B}_d$ und $f : X \to [0, \infty]$ messbar sowie

$$B := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Zeigen Sie $B \in \mathcal{B}_{d+1}$ und

$$\lambda_{d+1}(B) = \int_X f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2 Punkte)

Hinweis zur Klausur Analysis III

Bitte besuchen Sie für alle Informationen bezüglich der Klausur zur Vorlesung Analysis III (insbesondere Anmeldeschluss!) die Seite

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de