KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2012/2013
INSTITUT FÜR ANALYSIS 14.12.2012
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

Analysis III

9. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 21.12.2012, 11.30 Uhr.

Aufgabe 33

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) $X, Y \in \mathcal{B}_1$ und $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ so, dass $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y) := f(x)g(y)$ nicht integrierbar ist,

(b) $X, Y \in \mathcal{B}_1$ und $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g \in \mathcal{L}^1(Y)$ so, dass $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $F(x,y) := f(x)+g(y)$ nicht integrierbar ist,

(c) $X, Y \in \mathcal{B}_1$ und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x \neq \int_Y \left(\int_X f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y,$$

(d) $X, Y \in \mathcal{B}_1$ und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ nicht integrierbar mit

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y < \infty,$$

Aufgabe 34 (K)

(a) Untersuchen Sie jeweils die angegebene Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf Integrierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls $\int_D f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y)$. (Jeweils 2 Punkte)

(i) $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0,1],\ x^2+y^2 = z^2\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) := yz$.

(ii) $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in (0,1),\ \frac{y}{x} > 1\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

(b) Es sei $I_k := (2^{-k}, 2^{1-k}]^2$ und $J_k := (2^{-1-k}, 2^{-k}] \times (2^{-k}, 2^{1-k}]$ für $k \in \mathbb{N}$, sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : (0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x,y) := \sum_{k=1}^{n} \left(2^{2k} \mathbb{1}_{I_k}(x,y) - 2^{2k+1} \mathbb{1}_{J_k}(x,y) \right)$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(0,1]^2$ gegen eine messbare Funktion f konvergiert und berechnen Sie die iterierten Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x.$$

Untersuchen Sie f außerdem auf Integrierbarkeit. (4 Punkte)

Aufgabe 35

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := [a, b]$ sowie $f, g \in \mathcal{L}^1(I)$. Ferner seien $F, G : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{und} \quad G(x) := \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie $F \cdot g, f \cdot G \in \mathcal{L}^1(I)$ und

$$\int_a^b F(x)g(x)\ \mathrm{d}x = F(b)G(b) - \int_a^b f(x)G(x)\ \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 36 (K)

(a) Es seien $k, l \in \mathbb{N}$ und $X \in \mathcal{B}_k,\ Y \in \mathcal{B}_l$ sowie $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g \in \mathcal{L}^1(Y)$. Zeigen Sie, dass $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $F(x, y) := f(x)g(y)$ in $\mathcal{L}^1(X \times Y)$ liegt und

$$\int_{X\times Y} F(x, y)\ \mathrm{d}(x, y) = \Big(\int_X f(x)\ \mathrm{d}x\Big)\Big(\int_Y g(y)\ \mathrm{d}y\Big).$$

(2,5 Punkte)

(b) Es seien $n, d_1, ..., d_n \in \mathbb{N}$ und $X_k \in \mathcal{B}_{d_k}$ für $k \in \{1, ..., n\}$. Ferner sei $X := X_1 \times ... \times X_n$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Zeigen Sie, dass

$$\int_X f(x_1, ..., x_n)\ \mathrm{d}(x_1, ..., x_n) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} ... \left(\int_{X_n} f(x_1, ..., x_n)\ \mathrm{d}x_n\right) ...\ \mathrm{d}x_2\right)\ \mathrm{d}x_1$$

gilt, falls **eine** der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in X$,

(2) f ist integrierbar auf X.

(3,5 Punkte)

Hinweis zur Klausur Analysis III

Bitte besuchen Sie für alle Informationen bezüglich der Klausur zur Vorlesung Analysis III (insbesondere Anmeldeschluss!) die Seite

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de