KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2012/2013
21.12.2012

Analysis III

10. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 11.01.2013, 11.30 Uhr.

Aufgabe 37

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) $X \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda_d(X \setminus X^o) > 0$,

(b) eine differenzierbare, bijektive Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche kein Diffeomorphismus ist,

(c) $X \in \mathcal{B}_d$ mit $X \neq \mathbb{R}^d$ und einen Diffeomorphismus $\phi : X \to \mathbb{R}^d$ mit $\phi \neq id$ und

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_X f(\phi(x))\,\mathrm{d}x$$

für jedes $f \in \mathcal{L}^1(X)$ (id bezeichnet die Identitätsabbildung $x \mapsto x$),

(d) ein $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ so, dass $B = [0,1]^2$ zulässig ist mit $\Gamma_\gamma = \partial B$,

(e) $B \subseteq \mathbb{R}^2$ nicht zulässig,

Aufgabe 38 (K)

Zeigen Sie jeweils $f \in \mathcal{L}^1(D)$ und berechnen Sie $\int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ unter Verwendung einer geeigneten Koordinatentransformation. (Jeweils 2 Punkte)

(a) $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0,\infty),\ 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$ und

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) := 8z(x^2+y^2).$$

(b) $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0,1],\ x^2+y^2 \leqslant (1-z)^2\}$ und

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) := (x^2+y^2)^2 e^{(1-z)^7}.$$

(c) $D := \{(x,y,z) \mid x^2 \leqslant y^2+z^2 \leqslant |x|\}$ und

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) := y^2.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 39

(a) Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ invertierbar, sowie $\mathcal{A} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit $\mathcal{A}(x) := Ax$. Zusätzlich sei $X \in \mathcal{B}_d$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn $g : \mathcal{A}^{-1}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $g(y) := f(Ay)$ integrierbar ist. Zeigen Sie ferner, dass in diesem Fall gilt:

$$\int_X f(x)\ \mathrm{d}x = |\det(A)| \int_{\mathcal{A}^{-1}(X)} f(Ay)\ \mathrm{d}y.$$

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := e^{-\|Ax\|^2}$ mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ gilt und berechnen Sie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ \mathrm{d}x$.

(c) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $D := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \|x\| < 1\}$ sowie $f_\alpha : D \to \mathbb{R}$ mit $f_\alpha(x) := \|x\|^\alpha$. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für die $f_\alpha \in \mathcal{L}^1(D)$ und berechnen Sie gegebenenfalls $\displaystyle\int_D f_\alpha(x)\ \mathrm{d}x$.

Aufgabe 40 (K)

(a) Es sei $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (1,1)\| \leqslant 1\}$. Bestimmen Sie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\partial A = \Gamma_\gamma$ so, dass A zulässig ist und berechnen Sie anschließend

(i) $\displaystyle\int_\gamma (x^2 - y^3)\ \mathrm{d}x - (y^2 - x^3)\ \mathrm{d}y,$ (ii) $\displaystyle\int_\gamma e^x \sin(y-1)\ \mathrm{d}x + e^x \cos(y-1)\ \mathrm{d}y.$

(Jeweils 1,5 Punkte)

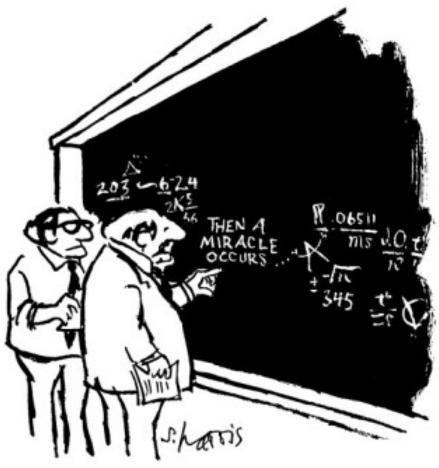
(b) Berechnen Sie jeweils unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes das Lebesgue-Maß der folgenden Mengen.

(i) $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t - \sin(t),\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - \cos(t),\ t \in [0, 2\pi]\}$, (2 Punkte)

(ii) $B_k := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^{\frac{1}{k}} + |y|^{\frac{1}{k}} \leqslant 1\}$ für $k \in \mathbb{N}$. (3 Punkte)

Hinweis: Laut Übung gilt der Gaußsche Integralsatz auch für Normalbereiche.

Wir wünschen Ihnen ein erholsames Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!



"I think you should be more explicit here in step two."