KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2012/2013
11.01.2013

Analysis III

11. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 18.01.2013, 11.30 Uhr.

Aufgabe 41

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) eine differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f \neq g$ und

$$(\text{rot } f)(x, y, z) = (x, y, z) = (\text{rot } g)(x, y, z),$$

(b) eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$(\text{div}(\text{grad } f))(x, y, z) = 1,$$

(c) eine Parameterdarstellung Φ des Flächenstücks

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1,\ y \in [0, 1]\},$$

(d) ein Flächenstück $S \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Parameterdarstellung $\Phi : B \to S$ so, dass $N(u, v) = (1, -1, 1)$ für $(u, v) \in B$,

(e) ein Flächenstück $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine Parametrisierung $\Phi : B \to S$ von S mit $N_2(u, v) = 0$ und $N_1, N_3 \neq 0$ auf B

Aufgabe 42

(a) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Weiter seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $F : D \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar und $g \in C^2(D, \mathbb{R})$ sowie $G \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie:

(i) $\text{div}(f \cdot F) = (\text{grad } f) \cdot F + f \cdot (\text{div } F)$,
(ii) $\text{rot}(f \cdot F) = f \cdot (\text{rot } F) + (\text{grad } f) \times F$,
(iii) $\text{rot}(\text{grad } g) = 0$,
(iv) $\text{div}(\text{rot } G) = 0$.

(b) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ein sternförmiges Gebiet und $F \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass rot $F = 0$ genau dann gilt, wenn ein $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ existiert mit grad $f = F$.

(c) Es sei $R \in (0, \infty)$ und $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant R,\ z \in [0, 1]\}$. Weiter sei $f \in C(Z, \mathbb{R})$ und $\Phi_r : B \to \mathbb{R}^3$ mit $B := [0, 2\pi] \times [0, 1]$ und

$$\Phi_r(\varphi, z) := (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z)$$

für $r \in (0, \infty)$. Zeigen Sie

$$\int_Z f(x, y, z) \,\mathrm{d}(x, y, z) = \int_0^R \left(\int_{\Phi_r} f \,\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}r.$$

Aufgabe 43 (K)

(a) Es sei $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \leqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Bestimmen Sie eine explizite Parameterdarstellung Φ_1 und eine nicht explizite Parameterdarstellung Φ_2 von S.
(2 Punkte)

(b) Es sei $R \in (1,\infty)$ und $B := [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ sowie $\Phi : B \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(u,v) := \big((R+\cos(v))\cos(u), (R+\cos(v))\sin(u), \sin(v)\big).$$

Berechnen Sie $I(\Phi)$. Skizzieren Sie außerdem $\phi(B)$. (2,5 Punkte)

(c) Gegeben sei das Flächenstück $F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2+y^2,\ z \in [1,2]\}$. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung Φ von F und berechnen Sie anschließend $\int_\Phi f \,\mathrm{d}\sigma$ für $f : F \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) := z(x^2+y^2)$. (3 Punkte)

Aufgabe 44 (K)

Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x,y,z) := (-y^3, x^3, -z^3)$ und

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1\}.$$

(a) Bestimmen Sie $\gamma \in C^1([0,2\pi],\mathbb{R}^3)$ positiv orientiert und geschlossen mit $\Gamma_\gamma = \partial B$.
(1,5 Punkte)

(b) Berechnen Sie $\int_\gamma F(x,y,z) \cdot \,\mathrm{d}(x,y,z)$ direkt. (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie $\int_\gamma F(x,y,z) \cdot \,\mathrm{d}(x,y,z)$ unter Verwendung des Satzes von Stokes.
(3 Punkte)

Hinweis zur Klausur Analysis III

Bitte besuchen Sie für alle Informationen bezüglich der Klausur zur Vorlesung Analysis III (insbesondere Anmeldeschluss!) die Seite

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de