KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2012/2013
18.01.2013

Analysis III

12. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 25.01.2013, 11.30 Uhr.

Aufgabe 45

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) $X \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda_d(X) = \infty$ und $f \in \mathcal{L}^p(X)$ für alle $p \in [1, \infty]$ und $f(x) \neq 0$ fast überall auf X,

(b) $X \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda_d(X) = \infty$ und $p, q \in [1, \infty]$ mit $p \neq q$ und $f \in \mathcal{L}^p(X) \cap \mathcal{L}^q(X)$ mit $f \neq 0$ fast überall sowie $g \in \mathcal{L}^p(X) \setminus \mathcal{L}^q(X)$,

(c) $X \in \mathcal{B}_d$ und $f : X \to \mathbb{R}$ mit $\sup_{x \in X} |f(x)| = 2$ und $\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = 1$,

(d) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in C([-1, 1], \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{L}^1([-1, 1]) \setminus C([-1, 1])$ mit $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \to \infty} 0$,

(e) $X \in \mathcal{B}_d$ und $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \to \infty} 1$ und $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \to \infty} \infty$.

Aufgabe 46 (K)

(a) Bestimmen Sie jeweils alle $p \in [1, \infty]$ so, dass $f : X \to \mathbb{R}$ ein Element von $\mathcal{L}^p(X)$ ist .

(i) $X = \mathbb{R}$ und $f(x) := \cos(x)$, (1 Punkt)

(ii) $X = \mathbb{R}^3$ und $f(x) := (1 + \|x\|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. (2 Punkte)

Hinweis zu (ii): Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung in α durch.

(b) Es seien $X = (0, \infty)$. Bestimmen Sie jeweils für $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : X \to \mathbb{R}$ alle $p \in [1, \infty]$ so, dass $\hat{f}_n \in L^p(X)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(L^p(X), \| \cdot \|_p)$ konvergiert.

(i) $f_n(x) := \mathbb{1}_{(0,n]}(x) \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{n}$, (ii) $f_n(x) := \dfrac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}$.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 47 (K)

Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$.

(a) Es seien $p, q \in [1, \infty]$ und $\hat{f} \in L^p(X)$ und $\hat{g} \in L^q(X)$ mit Repräsentanten $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X)$. Weiter sei $r \in [1, \infty]$ definiert durch $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ und $\hat{f} \cdot \hat{g} := \widehat{f \cdot g}$.

(i) Zeigen Sie $\hat{f} \cdot \hat{g} \in L^r(X)$ und $\|\hat{f} \cdot \hat{g}\|_r \leqslant \|\hat{f}\|_p \cdot \|\hat{g}\|_q$. (4,5 Punkte)

(ii) Es sei $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(X)$ mit $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $(\hat{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^q(X)$ mit $\|\hat{g}_n - \hat{g}\|_q \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zeigen Sie $\|\hat{f}_n \cdot \hat{g_n} - \hat{f} \cdot \hat{g}\|_r \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (1,5 Punkte)

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $p_1, ..., p_n \in [1, \infty]$ und $\hat{f}_i \in L^{p_i}(X)$ für $i \in \{1, ..., n\}$. Zeigen Sie $\hat{f}_1 \cdot ... \cdot \hat{f}_n \in L^r(X)$ für $r \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_n}$ und

$$\|\hat{f}_1 \cdot ... \cdot \hat{f}_n\|_r \leqslant \|\hat{f}_1\|_{p_1} \cdot ... \cdot \|\hat{f}_n\|_{p_n}.$$

(1 Punkt)

Aufgabe 48

Es sei $d \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$ und $\hat{f} \in L^p(X) \cap L^q(X)$ mit $p, q \in [1, \infty]$ und $p < q$. Ferner sei $\theta \in (0, 1)$ und $r \in (p, q)$ definiert durch $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$.

(a) Zeigen Sie $\hat{f} \in L^r(X)$ und

$$\|\hat{f}\|_r \leqslant \|\hat{f}\|_p^{1-\theta} \|\hat{f}\|_q^{\theta}$$

und $\hat{f} \in L^s(X)$ für alle $s \in (p, q)$.

(b) Es sei $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(X) \cap L^q(X)$ und $\hat{f} \in L^q(X) \cap L^p(X)$ mit $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\hat{f}_n\|_q < \infty$. Zeigen Sie $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_r \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c) Es sei $q = \infty$. Zeigen Sie $\hat{f} \in L^s(X)$ für $s \in (p, \infty)$ und $\|\hat{f}\|_s \stackrel{s\to\infty}{\longrightarrow} \|\hat{f}\|_\infty$.

Hinweis zu (c): Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in (s, ∞) mit $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Zeigen Sie

$$\liminf_{n\to\infty} \|\hat{f}\|_{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \|\hat{f}\|_{a_n}.$$

In diesem Zusammenhang kann es von Vorteil sein, wenn man folgende Aussage zeigt: Es sei $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ eine Menge $M_\epsilon \in \mathcal{B}(X)$ mit $\lambda_d(M_\epsilon) \in (0, \infty)$ und $|f(x)| > \|\hat{f}\|_\infty - \epsilon$ für $x \in M_\epsilon$.

Hinweis zur Klausur Analysis III

Bitte besuchen Sie für alle Informationen bezüglich der Klausur zur Vorlesung Analysis III (insbesondere Anmeldeschluss!) die Seite

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de