KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2012/2013
25.01.2013

Analysis III

13. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 01.02.2013, 11.30 Uhr.

Aufgabe 49

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) $X \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda_d(X) = \infty$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ sowie $g \in \mathcal{L}^q(X)$ für alle $q \in (1, \infty]$ und $f \cdot g \notin \mathcal{L}^1(X)$,

(b) $X \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda_d(X) < \infty$ und $q \in (1, \infty)$ sowie $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ und $g \in \mathcal{L}^r(X)$ für alle $r \in [1, q)$ mit $f \cdot g \notin \mathcal{L}^q(X)$,

(c) $X \in \mathcal{B}_d$ und $f_n, f \in \mathcal{L}^p(X)$ mit $\hat{f}_n \neq \hat{f} \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $\|f_n - f\|_p \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für alle $p \in [1, \infty)$ und $f_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ für alle $x \in X$.

(d) $X \in \mathcal{B}_d$ und $p, q \in [1, \infty)$ sowie $f_n, f \in \mathcal{L}^p(X) \cap \mathcal{L}^q(X)$ mit $\|f_n - f\|_p \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\|f_n - f\|_q \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$,

(e) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c((0, \infty))$ mit $\|f_n - \mathbb{1}_{[2,3]}\|_p \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für alle $p \in [1, \infty)$.

Zusatzfrage: Was sagen die Beispiele aus (a) und (b) über die Behauptungen aus dem Satz über die Hölder-Ungleichung aus (siehe Satz 16.1 und Aufgabe 47 (a))?

Aufgabe 50 (K)

(a) Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$ sowie $p, q \in [1, \infty)$ und $Y := L^p(X) \cap L^q(X)$.

(i) Für $f \in Y$ setzen wir $\|f\|_Y := \max\{\|f\|_p, \|f\|_q\}$. Zeigen Sie, dass $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum ist. (4 Punkte)

(ii) Es sei $f \in L^p(X)$. Zeigen Sie, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y existiert mit $\|f_n - f\|_p \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (2 Punkte)

(b) Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq X, Y \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda_d(X) < \infty$ und $K \in L^2(X \times Y)$ sowie $f \in L^2(Y)$.

(i) Zeigen Sie, dass eine Nullmenge $N \subseteq X$ so existiert, dass (3 Punkte)

$$Af : X \to \mathbb{R}, \qquad (Af)(x) := \mathbb{1}_{X\setminus N}(x) \int_Y K(x, y) f(y) \, \mathrm{d}y$$

wohldefiniert und messbar ist.

(ii) Zeigen Sie $Af \in L^2(X)$ und (1 Punkt)

$$\|Af\|_2 \leqslant \|K\|_2 \|f\|_2.$$

Aufgabe 51

Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ mit

(i) $\varphi(x) \geqslant 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = 1$,

(ii) $\operatorname{supp}(\varphi) = [-1, 1]$,

sowie $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$ (siehe Aufgabe 27 (a)).

(a) Zeigen Sie:

(1) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_n(x) \geqslant 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{supp}(\varphi_n) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ sowie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x = 1$.

(2) Für ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ gilt $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus I} \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_n * f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und $\|\varphi_n * f\|_1 \leqslant \|f\|_1$.

(c) Es gilt $\|\varphi_n * f - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Hinweis zu (c): Nutzen Sie aus, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $g \in C_c(\mathbb{R})$ existiert mit $\|g - f\|_1 < \epsilon$ und zeigen Sie für alle $\delta > 0$

$$(\varphi_n * g)(x) - g(x) = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(y)(g(x-y) - g(x))\ dy + \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} \varphi_n(y)(g(x-y) - g(x))\ dy.$$

Aufgabe 52 (K)

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ sowie $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $F'(x) = u(x) + iv(x)$ für $x \in [a, b]$. Zeigen Sie:

(i) Falls $u, v \in R([a, b])$ so gilt $\displaystyle\int_a^b F'(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. (1 Punkt)

(ii) Falls $F \in C^1([a, b])$ so gilt $u, v \in R([a, b])$. (0,5 Punkte)

(b) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $G : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $G(x) := e^{xz}$ stetig differenzierbar ist mit $G'(x) = ze^{xz}$ für $x \in [a, b]$ und berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{xz}\ \mathrm{d}x$. (2,5 Punkte)

Hinweis zur Klausur Analysis III

Bitte besuchen Sie für alle Informationen bezüglich der Klausur zur Vorlesung Analysis III (insbesondere Anmeldeschluss!) die Seite

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de