KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2012/2013
01.02.2013

Analysis III

14. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 08.02.2013, 11.30 Uhr.

Aufgabe 53

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) eine Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $f \neq 0$ fast überall und $(f, b_0) = 0$,

(b) eine Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $(f, b_k) = (f, b_{-k})$ für $k \in \mathbb{N}$,

(c) eine Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_n = 0$ und $\beta_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$,

(d) eine Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |(f, b_k)|^2 < \infty$ und $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |(f, b_k)| = \infty$,

(e) eine stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(2\pi)$ und den Fourierkoeffizienten $(f, b_k) = 2^{-|k|}$,

(f) eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$ so, dass keine Funktion $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ mit $(f, b_k) = a_k$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ existiert.

Aufgabe 54

(a) Es sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)(\pi^2 - x^2) + \mathbb{1}_{[\pi,2\pi]}(x)(\pi^2 - (2\pi - x)^2)$.

  (i) Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe von f.

  (ii) Berechnen Sie den Reihenwert von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in (0, \infty)$ so, dass ein $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ mit $(f, b_k) = (1 + |k|)^{-\alpha}$ für $k \in \mathbb{Z}$ existiert.

Hinweis zu (b): Ein Blick auf Aufgabe 56 (c) schadet nicht.

Aufgabe 55 (K)

Es seien $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \cos\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right) \qquad \text{und} \qquad g(x) := \sin(x - \pi).$$

(a) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f und g. (3,5 Punkte)

(b) Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe von f und g. (1,5 Punkte)

(c) Berechnen Sie den Reihenwert von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4k^2)^2}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}$. (2 Punkte)

— bitte wenden —

Aufgabe 56 (K)

(a) Es seien die Mengen (2 Punkte)

$$\begin{aligned}\ell_2 &:= \Big\{(s_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_0 \mid \|(s_k)\|_{\ell_2} := \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |s_k|^2\big)^{\frac{1}{2}} < \infty\Big\} \text{ und}\\ \ell_\infty &:= \{(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_0 \mid \|(s_k)\|_{\ell_\infty} := \sup_{k\in\mathbb{Z}} |s_k| < \infty\}\end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $(\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ und $(\ell_\infty, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ normierte Räume sind.

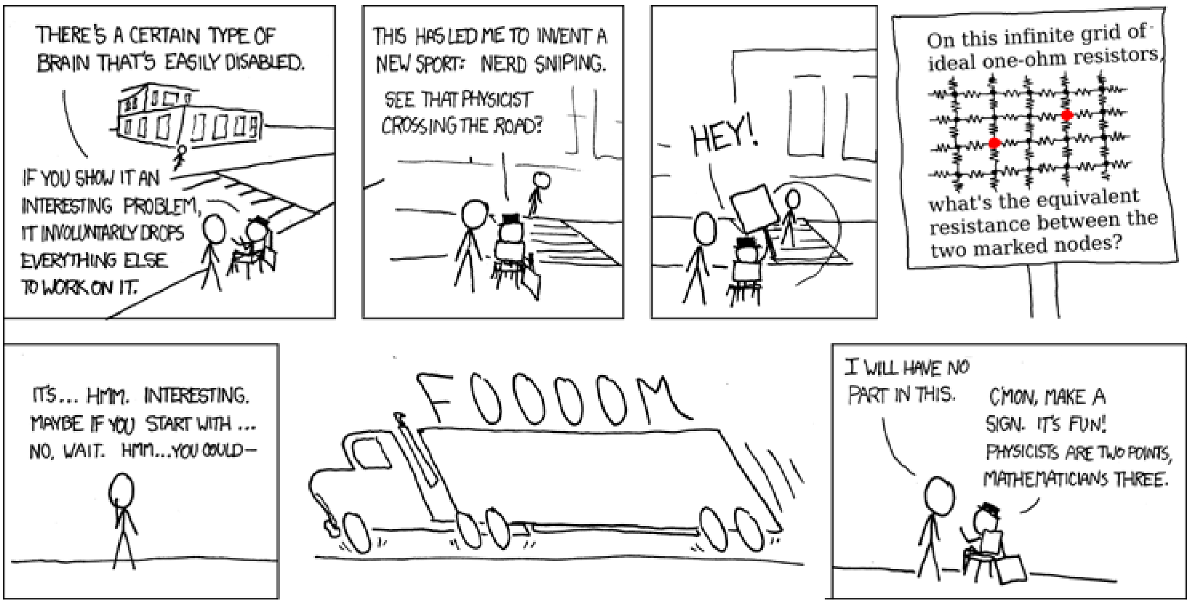
(b) Für $k \in \mathbb{Z}$ und $f \in L^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ setzen wir $c_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\mathcal{F}_1 : \begin{cases} L^1([0,2\pi],\mathbb{C}) & \to & \ell_\infty, \\ f & \mapsto & (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_2 : \begin{cases} L^2([0,2\pi],\mathbb{C}) & \to & \ell_2, \\ f & \mapsto & (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig sind. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_2$ bijektiv ist. (2 Punkte)

Hinweis: Die Menge $\ell_0 := \{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid \forall_{k\in\mathbb{Z}} : \ x_k \in \mathbb{C}\}$ versehen mit Skalarmultiplikation $\alpha \cdot (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} := (\alpha x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und Addition $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} + (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} := (x_k + y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist ein komplexer Vektorraum. Beachten Sie außerdem in (b), dass $c_k = (f, b_k)$ für $k \in \mathbb{Z}$, falls $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.



Quelle: http://xkcd.com/356/

Hinweis zur Klausur Analysis III

Bitte besuchen Sie für alle Informationen bezüglich der Klausur zur Vorlesung Analysis III (insbesondere Anmeldeschluss!) die Seite

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de