Nachtrag zu Übung 5 vom 16.11.2012

Voraussetzung: Sei $X \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda_d(X) < \infty$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

Behauptung: f ist genau dann integrierbar, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_d(\{|f| \geq k\}) < \infty$.

Beweis: Da f messbar ist, folgt dass $|f|$ messbar ist und wegen $|f| \geq 0$ ist $\int_X |f(x)| \, \mathrm{d}x$ definiert. Wir setzen für $l \in \mathbb{N}_0$ die Mengen $A_l := \{l+1 > |f| \geq l\}$ und für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $B_n := \bigcup_{l=0}^{n} A_l$, wobei alle diese Mengen messbar sind, da f messbar ist. Dann gilt $A_l \cap A_k = \emptyset$ für $k \neq l$ und $B_n \uparrow X$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n := \mathbb{1}_{B_n}|f|$ ist eine monoton steigende Folge messbarer Funktionen mit $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |f|$ punktweise auf X. Der Satz von Beppo-Levi liefert

$$\int_X |f(x)| \, \mathrm{d}x = \sum_{l=0}^{\infty} \int_{A_l} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \sum_{l=0}^{\infty} l\lambda_d(A_l) + \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_d(A_l) = \sum_{l=1}^{\infty} l\lambda_d(A_l) + \lambda_d(X)$$

und analog

$$\int_X |f(x)| \, \mathrm{d}x \geq \sum_{l=1}^{\infty} l\lambda_d(A_l).$$

Also gilt

$$\int_X |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty \iff \sum_{l=1}^{\infty} l\lambda_d(A_l) < \infty.$$

Wir zeigen nun

$$\sum_{l=1}^{\infty} l\lambda_d(A_l) < \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_d(\{|f| \geq k\}) < \infty.$$

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_d(\{|f| \geq k\}) < \infty$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l=1}^{n} l\lambda_d(A_l) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_d(\{n+1 > |f| \geq k\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_d(\{|f| \geq k\}),$$

und das Monotoniekriterium für Reihenkonvergenz liefert $\sum_{l=1}^{\infty} l\lambda_d(A_l) < \infty$.

Es sei $\sum_{l=1}^{\infty} l\lambda_d(A_l) < \infty$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ einerseits $\sum_{l=n+1}^{\infty} l\lambda_d(A_l) < \infty$ und andererseits

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_d(\{|f| \geq k\}) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k}^{\infty} \lambda_d(A_l) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k}^{n} \lambda_d(A_l) + n \sum_{l=n+1}^{\infty} \lambda_d(A_l) \\
&< \sum_{l=1}^{n} l\lambda_d(A_l) + \sum_{l=n+1}^{\infty} l\lambda_d(A_l) = \sum_{l=1}^{\infty} l\lambda_d(A_l) < \infty.
\end{aligned}$$

Wie zuvor folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_d(\{|f| \geq k\}) < \infty$.

□