SATZ: Ist $f \in R[a,b]$ messbar, so ist $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ und

$$L-\int_{[a,b]} f\,dx = R-\int_a^b f\,dx.$$

<u>Beweis:</u> Wir können $f \geq 0$ auf $[a,b]$ annehmen (andernfalls betrachte $f+c$ mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}$).

Für eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_m\}$ von $[a,b]$ sei

$$\underset{h_Z}{g_Z}(x) := \begin{cases} f(a), & \text{falls } x = a \\ \underset{\sup}{\inf} f([x_{j-1}, x_j]), & \text{falls } x \in (x_{j-1}, x_j]. \end{cases}$$

Es sei (Z_n) eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit: $|Z_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ und Z_{n+1} ist eine Verfeinerung von Z_n. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$g_n := g_{Z_n}, \quad h_n := h_{Z_n}.$$

Dann sind g_n, h_n einfach, $0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq f$ auf $[a,b]$ und $0 \leq f \leq h_{n+1} \leq h_n \leq h_1$ auf $[a,b]$.

Weiter ist $L-\int_{[a,b]} g_n\,dx = s_f(Z_n)$ (← Untersumme)

und $L-\int_{[a,b]} h_n\,dx = S_f(Z_n)$ (← Obersumme).

Definiere $g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ und $h(x) := \lim_{n\to\infty} h_n(x)$ für $x \in [a,b]$.

Satz 3.5 $\Rightarrow$ g und h sind messbar (klar: $g, h \geq 0$).

Damit ist (g_n) eine für g zulässige Folge!

Wegen $\lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) = R-\int_a^b f(x)\,dx$ (A I, 23.17),

folgt:

$$L-\int_{[a,b]} g\,dx = \lim_{n\to\infty}\Big(L-\int_{[a,b]} g_n\,dx\Big) = \lim_{n\to\infty} s_f(Z_n)$$

$$= R-\int_a^b f(x)\,dx < \infty.$$

Damit ist $g \in \mathcal{L}^1([a,b])$.

Ähnlich sieht man: $h \in \mathcal{L}^1([a,b])$ und $L-\int_{[a,b]} h\,dx$ $= R-\int_a^b f\,dx$.

Wir haben also: $L-\int_{[a,b]} (h-g)\,dx = 0$. Wegen $h-g \geq 0$ auf $[a,b]$, folgt aus 5.2(1): $h = g$ f.ü.

Wegen $g \leq f \leq h$ auf $[a,b]$ ist dann: $h = f$ f.ü.

5.3(1) liefert: f ist ib, und damit $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ und

$$L-\int_{[a,b]} f\,dx = L-\int_{[a,b]} g\,dx \overset{s.o.}{=} R-\int_a^b f\,dx. \quad ■$$