KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2012/2013
22.10.2012

Analysis III

Themen für das 1. Tutorium

1. Elementare Regeln für den Umgang mit Mengen:
Es seien X, Y nichtleere Mengen und $\mathcal{A}$ ein beliebiges Mengensystem aus Teilmengen von X sowie $\mathcal{B}$ ein beliebiges Mengensystem aus Teilmengen von Y. Wir setzen außerdem $A^c := X \setminus A$ für $A \subseteq X$ bzw. $B^c := Y \setminus B$ für $B \subseteq Y$.

(a) Es gilt

$$\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\Big)^c = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^c \quad\text{und}\quad \Big(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\Big)^c = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^c.$$

(b) Es sei zusätzlich $f : X \to Y$ eine Abbildung. Es gelten:

(i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$ und $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(ii) $\forall_{A\subseteq X} :\ f(A^c) \supseteq f(X) \setminus f(A)$ und $\forall_{B\subseteq Y} :\ f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c)$.

(iii) $f\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\Big) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A)$ und $f\Big(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\Big) \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A)$.

(iv) $f^{-1}\Big(\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B\Big) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} f^{-1}(B)$ und $f^{-1}\Big(\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B\Big) = \bigcap_{B\in\mathcal{B}} f^{-1}(B)$.

2. Definition Limes Superior und Inferior von Folgen aus Mengen:
Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X sowie $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Wir definieren

$$\liminf_{j\to\infty} A_j := \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j \quad\text{und}\quad \limsup_{j\to\infty} A_j := \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j.$$

und wir sagen, dass $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert, wenn

$$\liminf_{j\to\infty} A_j = \limsup_{j\to\infty} =: A.$$

In diesem Fall bezeichnen wir $\lim_{j\to\infty} A_j := A$ als Grenzwert von $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt

$$\liminf_{j\to\infty} A_j \in \mathcal{A} \quad\text{und}\quad \limsup_{j\to\infty} A_j \in \mathcal{A}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\liminf_{j\to\infty} A_j &= \{x \in X \mid \exists_{j_0(x)\in\mathbb{N}}\forall_{j\geqslant j_0(x)} :\ x \in A_j\}\\ \limsup_{j\to\infty} A_j &= \{x \in X \mid x \in A_j \text{ für unendlich viele j}\}.\end{aligned}$$

(c) Aus $A_j \subseteq A_{j+1}$ für $j \in \mathbb{N}$ folgt $\lim_{j\to\infty} A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j =: A$. Man schreibt in diesem Fall $A_j \uparrow A$.

(d) Aus $A_{j+1} \subseteq A_j$ für $j \in \mathbb{N}$ folgt $\lim\limits_{j\to\infty} A_j = \bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j =: A$. Man schreibt in diesem Fall $A_j \downarrow A$.

3. Riemannintegral

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $R([a,b])$ die Menge der reellwertigen Riemann-integrierbaren Funktionen. Für $f \in R([a,b])$ setzen wir

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass $(R([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ nicht vollständig ist.

4. Das Banach-Tarski Paradoxon (1924):

Formulierung: Es sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geqslant 3$ und $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkte Mengen mit $A^o, B^o \neq \emptyset$. Dann gibt es Mengen $C_1, ..., C_n \subseteq \mathbb{R}^d$ und Bewegungen $\beta_1, ..., \beta_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ so, dass A mit der disjunkten Vereinigung der $C_1, ..., C_n$ und B mit der disjunkten Vereinigung $\beta_1(C_1), ..., \beta_n(C_n)$ übereinstimmt.