KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Luca Hornung

SS 2017
18. Mai 2017

Analysis für das Lehramt
3. Übungsblatt

Aufgabe 7

Berechne jeweils das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz}$ über die folgenden Funktionen und Kurven. Falls nicht angegeben, finde zunächst eine Parametrisierung der Kurve.

a) $f(z) = \overline{z}z^2$ und $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{i(\pi-t)}$.

b) $f(z) = \overline{z}z^2$ und γ ist ein geradlinige Verbindung von -1 nach i.

c) $f(z) = \overline{z}z^2$ und γ ist der Weg gegen den Uhrzeigersinn entlang des Randes von $\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \in (0,1)\}$.

Aufgabe 8

Es sei $a, b > 0$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = e^{-z^2}$.

a) Finde einen Weg $\gamma_{a,b}$, der den Rand des Rechtecks mit Eckpunken $\pm a, \pm a + ib$ parametrisiert.

b) Zeige $\int_{\gamma_{a,b}} f(z)\,\mathrm{dz} = 0$ für alle $a, b > 0$.

c) Folgere durch den Grenzübergang $a \to \infty$ die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+ib)^2}\,\mathrm{dt}\,.$$

d) Zeige, dass die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2bt) e^{-t^2}\,\mathrm{dt} = e^{-b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt}\,.$$

für alle $b > 0$ gilt.

Aufgabe 9

Es sei p ein Polynom, $R > 0$ und $\gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = Re^{it}$. Zeige

$$\int_{\gamma_R} \overline{p(z)}\,\mathrm{dz} = 2\pi i R^2 \overline{p'(0)}.$$