

Analysis für das Lehramt 8. Übungsblatt

Die Aufgaben auf diesem Blatt werden in der Übung vorbereitet und gerechnet.

Aufgabe 21

Die Jordan-messbare Menge V sei durch

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y^2 \leq z^3 \leq x\}$$

gegeben. Berechne das Jordan-Maß von V .

Aufgabe 22

Sei $\varphi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}$, $\varphi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$.

Zeige, dass φ ein Diffeomorphismus ist und berechne $|\det(\varphi'(r, \varphi, z))|$. Insbesondere gilt also nach dem Transformationssatz für eine offene Jordan messbare Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ und eine stetige Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\int_V f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{\varphi^{-1}(V)} f(\varphi(r, \varphi, z)) r \, dr \, d\varphi \, dz.$$

Aufgabe 23

Die Jordan-messbare Menge V sei durch

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{3}x, 0 \leq z \leq 4\}$$

gegeben. Berechne $\int_V (x^2 + y^2 + z^2) \, d(x, y, z)$.

Aufgabe 24

Die Jordan-messbare Menge V sei durch

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 \leq 16, x^2 + y^2 \leq 4z^2, 0 \leq z\}$$

gegeben. Berechne das Jordan-Maß von V .