KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2017
Institut für Analysis 11. Mai 2017
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Luca Hornung

Analysis für das Lehramt
1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie)

In welchen Punkten $z = x + iy$ ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wo ist f holomorph? Bestimme gegebenenfalls $f'(z)$.

a) $f(x + iy) = \sin(x)\sin(y) - i\cos(x)\cos(y)$,

b) $f(z) = 3z^3 - iz^2 + 2iz + 1$,

c) $f(x + iy) = x$,

d) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$.

Aufgabe 2 (Holomorphie und harmonische Funktionen)

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph und $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass $\Delta u(x, y) = \Delta v(x, y) = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist
$$u(x, y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2$$
der Realteil einer holomorphen Funktion $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Bestimme für diese λ alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die u als Realteil haben.

Aufgabe 3 (Teilmengen von $\mathbb{C}$)

Skizziere die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene.

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1 \text{ und } |z - 2i + 1| \leq 4\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = 1\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| + |z - i| = 6\}$.