Lösungen zur Aufgabe 13 auf dem 5. Übungsblatt.

Teil a) In der Übung haben wir bereits gezeigt, dass

$$f(z) := \frac{z^2+1}{z^4+1} = \frac{z^2+1}{(z+\sqrt{i})(z-\sqrt{i})(z+\sqrt{-i})(z-\sqrt{-i})}$$

gilt mit $\sqrt{i} = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$ und $\sqrt{-i} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}$. Nun definieren wir für $a > 10$ die Wege $\gamma_1 : [-a, a] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = t$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = ae^{it}$. Die Hintereinanderausführung dieser Wege ergibt einen geschlossenen Weg um die Polstellen $z_0 = \sqrt{i}$ und $z_1 = \sqrt{-i}$. Beide Pole haben Ordnung eins und der Weg verläuft gegen den Uhrzeigersinn. Folglich ergibt sich mit dem Residuensatz

$$\int_{\gamma_1} \frac{z^2+1}{z^4+1}\,\mathrm{dz} + \int_{\gamma_2} \frac{z^2+1}{z^4+1}\,\mathrm{dz} = 2\pi i(\mathrm{res}(f, z_0) + \mathrm{res}(f, z_1)). \tag{0.1}$$

Wir berechnen nun die Residuen mit der Formel für Pole erster Ordnung. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{res}(f, z_0) &= \tfrac{i+1}{(z_0+\sqrt{i})(z_0+\sqrt{-i})(z_0-\sqrt{-i})} = \tfrac{\sqrt{2}}{4i}\\ \mathrm{res}(f, z_1) &= \tfrac{i+1}{(z_1+\sqrt{i})(z_1+\sqrt{-i})(z_1-\sqrt{i})} = \tfrac{\sqrt{2}}{4i}.\end{aligned}$$

Setzen wir dies in (0.1) ein und wenden wir die Definition des Wegintegrals an, so ergibt sich

$$\int_{-a}^{a} \tfrac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{dt} + \int_0^{\pi} \tfrac{a^2e^{2it}+1}{a^4e^{4it}+1} aie^{it}\,\mathrm{dt} = \sqrt{2}\pi.$$

Nun gehen wir zum Grenzwert $a \to \infty$ über. Es gilt

$$\begin{aligned}\Big| \int_0^{\pi} \tfrac{a^2e^{2it}+1}{a^4e^{4it}+1} aie^{it}\,\mathrm{dt} \Big| &\leq a^{-1} \int_0^{\pi} \tfrac{|e^{2it}+a^{-2}|}{|e^{4it}+a^{-4}|}\,\mathrm{dt} \leq a^{-1} \int_0^{\pi} \tfrac{2}{((\cos(4t)+a^{-4})^2+\sin(4t)^2)^{1/2}}\,\mathrm{dt}\\ &= a^{-1} \int_0^{\pi} \tfrac{2}{(1+a^{-8}+2a^{-4}\cos(4t))^{1/2}}\,\mathrm{dt}\end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^{\pi} \tfrac{a^2e^{2it}+1}{a^4e^{4it}+1} aie^{it}\,\mathrm{dt} = 0.$$

Wegen

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \tfrac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{dt}$$

erhalten wir insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{dt} = \sqrt{2}\pi.$$

Teil b) Es gilt

$$f(z) := \frac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+2} = \frac{e^{i\pi z}}{(z+1-i)(z+1+i)}$$

Nun definieren wir für $a > 10$ die Wege $\gamma_1 : [-a, a] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = t$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = ae^{it}$. Die Hintereinanderausführung dieser Wege ergibt einen geschlossenen Weg um die Polstelle $z_0 = i - 1$. Der Pol ist erster Ordnung und der Weg verläuft gegen den Uhrzeigersinn. Folglich ergibt sich mit dem Residuensatz

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+2}\,\mathrm{dz} + \int_{\gamma_2} \frac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+2}\,\mathrm{dz} = 2\pi i\,\mathrm{res}(f, z_0). \tag{0.2}$$

Wir berechnen das Residuum mit der Formel für Pole erster Ordnung. Es gilt

$$\mathrm{res}(f, z_0) = \tfrac{e^{i\pi(i-1)}}{i-1+1+i} = -\tfrac{e^{-\pi}}{2i}.$$

Dabei haben wir $e^{-i\pi} = -1$ verwendet. Setzen wir dies in (0.2) ein und wenden wir die Definition des Wegintegrals an, so ergibt sich

$$\int_{-a}^{a} \frac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+2}\,\mathrm{dt} + \int_{0}^{\pi} \frac{e^{i\pi a e^{it}} a i e^{it}}{a^2 e^{2it} + 2a e^{it} + 2}\,\mathrm{dt} = -\pi e^{-\pi}.$$

Nun gehen wir zum Grenzwert $a \to \infty$ über. Dabei verwenden wir die Abschätzung

$$|e^{i\pi a e^{it}}| = |e^{i\pi a(\cos(t)+i\sin(t))}| = |e^{i\pi a\cos(t)} e^{-\pi a\sin(t)}| = e^{-\pi a\sin(t)} \leq 1$$

für $t \in [0, \pi]$. Wir erhalten

$$\Big| \int_{0}^{\pi} \frac{e^{i\pi a e^{it}} a i e^{it}}{a^2 e^{2it} + 2a e^{it} + 2}\,\mathrm{dt} \Big| \leq a^{-1} \int_{0}^{\pi} \tfrac{1}{|e^{2it} + 2a^{-1}e^{it} + 2a^{-2}|}\,\mathrm{dt}$$

und damit

$$\lim_{a\to\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{e^{i\pi a e^{it}} a i e^{it}}{a^2 e^{2it} + 2a e^{it} + 2}\,\mathrm{dt} = 0.$$

Wegen

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{e^{i\pi t}}{t^2+2t+2}\,\mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t}}{t^2+2t+2}\,\mathrm{dt}$$

erhalten wir insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t}}{t^2+2t+2}\,\mathrm{dt} = -\pi e^{-\pi}.$$