Lösungen zur Aufgabe 18 auf dem 6. Übungsblatt.

Teil b) Gesucht ist die Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\begin{cases} y'(t) = -\cos(t)y(t) + \sin(t)\cos(t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Dazu wenden wir die Variation der Konstanten aus Vorlesung und Übung an. Wir erhalten

$$y(t) = e^{A(t)}y(0) + e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(s)} b(s)\, \mathrm{ds}$$

mit $A(t) = \int_0^t -\cos(s)\, \mathrm{ds} = -\sin(t)$. Setzen wir dies ein, so ergibt sich

$$y(t) = e^{-\sin(t)} + e^{-\sin(t)} \int_0^t e^{\sin(t)} \sin(s)\cos(s)\, \mathrm{ds}\,.$$

Wir müssen also noch das Integral lösen. Wir verwenden die Substitution $u = \sin(s)$ und erhalten

$$\int_0^t e^{\sin(t)} \sin(s)\cos(s)\, \mathrm{ds}$$

$$= \int_0^{\sin(t)} e^u u\, \mathrm{du} = [e^u u]_0^{\sin(t)} - \int_0^{\sin(t)} e^u\, \mathrm{du} = e^{\sin(t)}\sin(t) - (e^{\sin(t)} - 1).$$

Daraus folgt schließlich

$$y(t) = e^{-\sin(t)} + \sin(t) - 1 + e^{-\sin(t)} = 2e^{-\sin(t)} + \sin(t) - 1.$$