Lösung Aufgabe 8: In der Übung wurde die Aufgabe bis einschlielich c) besprochen. Es wurde also gezeigt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+ib)^2}\,\mathrm{dt}\,. \tag{0.1}$$

gilt. Nun folgern wir das Ergebnis aus d). Wegen $(t+ib)^2 = t^2 - b^2 + 2ibt$ gilt

$$e^{-(t+ib)^2} = e^{-t^2+b^2-2ibt} = e^{-2ibt}e^{b^2}e^{-t^2} = \big(\cos(-2bt) + i\sin(-2bt)\big)e^{b^2}e^{-t^2}.$$

Setzen wir das in (0.1) ein, erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(-2bt)e^{b^2}e^{-t^2}\,\mathrm{dt} + \int_{-\infty}^{\infty} i\sin(-2bt)e^{b^2}e^{-t^2}\,\mathrm{dt}\,.$$

Die Funktion $t \mapsto \sin(-2bt)e^{b^2}e^{-t^2}$ ist ungerade, da $\sin$ ungerade und $t \mapsto e^{-t^2}$ gerade ist. Folglich gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} i\sin(-2bt)e^{b^2}e^{-t^2}\,\mathrm{dt} = 0.$$

Verwenden wir zustzlich, dass $\cos$ eine gerade Funktion ist, gilt $\cos(-2bt) = \cos(2bt)$. Insgesamt haben wir also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt} = e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2bt)e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$$

gezeigt. Das war das behauptete Resultat.

Bemerkung: Mit anderen Mitteln kann man beweisen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt} = \sqrt{\pi}$ gilt. Somit wurde in der Aufgabe gezeigt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2bt)e^{-t^2}\,\mathrm{dt} = \sqrt{\pi}e^{-b^2}$$

gilt. Die Berechnung des Integrals ist deshalb bemerkenswert, da sie auf klassische Weise nicht möglich gewesen wäre, denn die Stammfunktion von $t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$ ist unbekannt.